

**KOINZIDENZEN
DIMENSIONERNIEDRIGENDER
ABBILDUNGEN**

VON
HARTMUT SCHLAGBAUER

FRANKFURT AM MAIN

1962

1963

ÜBER DIE KOINZIDENZEN
DIMENSIONERNIEDRIGER ABBIILDUNGEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main,
vorgelegt von



Hartmut Schlagbauer
aus
Kempten im Allgäu

November 1962



Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. Theodor Wieland

1. Referent: Prof. Dr. Wolfgang Franz

2. Referent: Priv.-Doz. Dr. Friedrich Wilhelm Bauer

Tag der mündlichen Prüfung: 25.2.1963

INHALTSVERZEICHNIS

=====

	Seite
Einleitung	1
I. Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen und Formeln	
1. Polyeder	4
2. Mannigfaltigkeiten	8
3. Produkträume	14
II. Konomologietheorie der Koinzidenzen	
4. Der Graph von Γ	16
5. Die Koinzidenzklasse	17
6. Eine Beziehung zwischen $j^n(\Gamma, \xi)$ und $(f, \xi)^v$	19
7. Die Hopfsche Definition der Koinzidenzklasse	20
8. Spezialfälle	23
9. Normalform	24
10. Beziehungen der Normalform zur Koinzidenzklasse	30
III. Homologietheorie der Koinzidenzen	
11. Dualisierung von II und Beispiele	34
12. Dimensionssatz	38
Literaturverzeichnis	53



E I N L E I T U N G

Koinzidenzpunkte zweier Abbildungen $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ und $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sind diejenigen Punkte $q \in \mathcal{M}$, für die $f(q) = g(q)$ ist. Koeffizientenbereich ist stets der Körper der rationalen Zahlen. Wir betrachten zunächst den Fall, daß $\mathcal{M}$ ein beliebiges, endliches, n -dimensionales Polyeder, $\mathcal{N}$ eine n -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit ist. $m - n = d \geq 0$. Dann lassen sich den Graphen von f und g n -dimensionale Kohomologieklassen $(f)^n$ und $(g)^n$ des Produktraumes $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ zuordnen, die invariant sind gegenüber Änderungen der Abbildungen innerhalb ihres Homologietypus. Deren Cup-Produkt liefert eine invariante $2n$ -dimensionale Kohomologieklassse von $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ und eine durch Projektion nach $\mathcal{N}$ entstehende n -dimensionale Kohomologieklassse $j^n(f, g)$ von $\mathcal{N}$. $j^n(f, g)$ erweist sich als identisch mit der schon von Lefschetz (zitiert nach [6]) angegebenen Koinzidenzklasse des Abbildungspaares f, g .

Weiter wird gezeigt, wie man durch beliebig kleine Abänderung von f die Menge der Koinzidenzpunkte in die Form eines höchstens d -dimensionalen Teilpolyeders einer genügend feinen Simplicialzerlegung K von $\mathcal{M}$ bringen kann (Normalform). Ein dieser Normalform aufgrund der Konstruktion natürlich zugeordneter n -dimensionaler Kozyklus $z^n(f, g)$ ist ein Repräsentant der Klasse $j^n(f, g)$.

Nun sei $\mathcal{M}$ eine m -dimensionale orientierte h -Mannigfaltigkeit. Dualisierung der für Urbildpolyeder gewonnenen Ergebnisse führt zunächst auf eine invariante Homologiekategorie $j_d(f, g)$ von $\mathcal{M}$. Die Normalform besitzt eine Zerlegung in Zellen der zur Ausgangsteilung M dualen Sternteilung M^* von $\mathcal{M}$. Ihr ist ein d -dimensionaler Zyklus $z_d(f, g)$ zugeordnet, der in der Klasse $j_d(f, g)$ liegt. $j_d(f, g)$ erhält dadurch eine Deutung als Klasse spezieller Koinzidenzgebilde.

Als Hauptsatz dieser Arbeit wird anschließend gezeigt:

Ist die Invariante $j_d(f, g) \neq 0$, so ist für jedes Paar f_1, g_1 aus der Abbildungskategorie von f, g die Dimension des Koinzidenzgebildes $K(f_1, g_1)$ mindestens d .

Zum Beweis wird mit Hilfe einer Reihe auseinander hervorgehender Normalformen ein d -dimensionaler sogenannter schwebender Zyklus auf $K(f, g)$ konstruiert, der nicht berandet, wenn $j_d(f, g) \neq 0$ ist. Da nach Kaplan [8] die mit Hilfe schwebender Zyklen definierten Homologiegruppen eines Kompaktums und dessen gewöhnliche Čechsche Homologiegruppen isomorph sind, folgt daraus, daß die d -dimensionale Čechsche Homologiegruppe von $K(f, g)$ nicht verschwindet, womit der Satz bewiesen ist.

Unter den Spezialfällen werden zwei besonders anschauliche hervorgehoben:

Wählt man $g = \text{const.}$, so besagt der Satz: Bei einer Abbildung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$, die in der Dimension n einen nichtverschwindenden Homomorphismus induziert, hat jeder Punkt von $\mathcal{N}$ ein mindestens d -dimensionales Urbild. Eine solche Abbildung ist also insbesondere stets wesentlich.

Sind f und g homolog, so lautet die Aussage:

Ist die Eulersche Charakteristik der Bildmannigfaltigkeit nicht null, so stimmen die beiden Abbildungen auf einer mindestens a -dimensionalen abgeschlossenen Teilmenge von M überein, wenn sie in der Dimension n einen nichtverschwindenden Homologiehomomorphismus induzieren. Für $M = \mathbb{N}$ ist darin der bekannte Satz enthalten: Jede Deformation einer Mannigfaltigkeit, deren Eulersche Charakteristik nicht null ist, hat mindestens einen Fixpunkt.

I. Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen und Formeln

1. Polyeder

1.1

Sei ein endliches Polyeder, ... ein durch simpliziale Unterteilung von ... entstehender Simplicialkomplex.

Wir wollen Cap- und Cup-Produkte zwischen orientierten Simplexen von M erklären.

Wenn ein orientiertes Simplex durch seine Ecken angegeben wird, etwa $\sigma_i^r = (a_0, \dots, a_r)$, so ist damit gemeint, dass die Eckenreihenfolge $a_0, \dots, a_r$ zu der positiven Orientierung des von den Ecken $a_0, \dots, a_r$ aufgespannten (nicht orientierten) Simplexes gehört.

Um für den Fall, dass ... eine Mannigfaltigkeit ist, die Dualität zwischen Cup-Produkt und Schnitt nicht nur für die zwischen den Kohomologie- bzw. Homologieklassen induzierten Produkte, sondern direkt für die Simplexe und Zellen ausnutzen zu können, verwenden wir eine von der üblichen abweichende Definition, in der keine Eckenordnung benutzt wird. Wir gehen aus von dem Cap-Produkt ([9], Definition (5.8)):

$$(1.1.1) \quad (a_p, \dots, a_{p+q}) \cap (a_0, \dots, a_p, \dots, a_{p+q}) = \\ = \sum \text{sign}(i_1, i_2, \dots, i_{p-1}) (a_{i_1, \dots, i_{p-1}, p, p+1}^1, a_{i_1, \dots, i_{p-1}, p, p+q}^2, \dots, a_{i_1, \dots, i_{p-1}, p+q}^p),$$

wobei die Summe über alle Permutationen $(i_1, i_2, \dots, i_{p-1})$ von $1, 2, \dots, p-1$ zu erstrecken ist und $a_{i_1, \dots, i_{p-1}, p, p+q}^\lambda$ eine Ecke des Simplexes $(a_{i_1}, \dots, a_{p+q})$ ist.

Je nach Wahl von $a_{i_1, \dots, i_{p+p+q}}$ erhalten wir verschiedene Produkte.

Nehmen wir z.B. nach Einführung einer Eckenordnung in M für $a_{i_1, \dots, i_{p+p+q}}$ die Ecke niedrigster Ordnung in $(a_{i_1}, \dots, a_{p+q})$, erhalten wir genau das Whitney'sche Produkt ([12] S. 405).

Wir wählen für $a_{i_1, \dots, i_{p+p+q}}$ die Ecke mit kleinstem Index in $(a_{i_1}, \dots, a_{p+q})$. Dann verschwinden alle Summanden bis auf den von der identischen Permutation herrührenden und die Definition für unser spezielles Cap-Produkt lautet:

$$(1.1.2) \quad (a_p, \dots, a_{p+q}) \cap (a_0, \dots, a_p, \dots, a_{p+q}) = (a_0, \dots, a_p).$$

Das Produkt $e_i^q \cap e_j^{p+q}$ ist genau dann nicht null, wenn e_i^q Seite von e_j^{p+q} ist, (im Gegensatz zur Whitney'schen Definition, wo e_i^q die von den $q+1$ Ecken niedrigster Ordnung aufgespannte Seite sein muß).

Die Übertragung auf Ketten geschieht linear:

$$(1.1.3) \quad \sum_i u_i e_i^q \cap \sum_j v_j e_j^{p+q} = \sum_{i,j} u_i v_j (e_i^q \cap e_j^{p+q}).$$

Das K R O N E C K E R - Produkt zweier Ketten gleicher Dimension bezüglich der Simplexe als Basis der Kettengruppen von M ist definiert durch

$$(1.1.4) \quad \sum_i u_i e_i^r \cdot \sum_j v_j e_j^r = \sum_k u_k v_k \cdot$$

für zwei beliebige Ketten u^r, v^{r-1} ist $u^r \cdot v^{r-1} = \partial u^r \cdot v^{r-1}$.

Über das Kroneckerprodukt ist mit jedem Cap-Produkt ein Cup-Produkt verknüpft:

$$(1.1.5) \quad (u^p \cup v^q) \cap w^{p+q} = u^p \cap (\dots \cap w^{p+q})$$

für Simplexe u, v, w diese Beziehung.

$$(1.1.6) \quad (e_i^p \cup e_j^q) \cap (a_p, \dots, a_{p+q}) = (a_0, \dots, a_i, \dots, a_{p+q}).$$

$e_i^p \cup e_j^q$ ist dann nicht null, wenn die Ecken von e_i^p und e_j^q zusammen ein $(p+q)$ -Simplex aufspannen.

Es gelten folgende Formeln:

$$(1.1.7) \quad \psi_i^p \cup (\psi_j^q \cup \psi_k^r) = (\psi_i^p \cup \psi_j^q) \cup \psi_k^r$$

$$(1.1.8) \quad \partial(\psi_i^p \cup \psi_j^q) = \partial\psi_i^p \cup \psi_j^q + (-1)^p \psi_i^p \cup \partial\psi_j^q$$

$$(1.1.9) \quad \partial(\psi_i^p \cup \psi_j^{p+q}) = (-1)^q \psi_i^p \cup \psi_j^{p+q} + \psi_i^p \cup \partial\psi_j^{p+q}$$

$$(1.1.10) \quad \psi_i^p \cup \psi_j^q = (-1)^{pq} \psi_j^q \cup \psi_i^p$$

Wegen (1.1.8) induziert das Cup-Produkt (1.1.6) ein Cup-Produkt zwischen Kohomologieklassen.

x_i^r ($i = 1, \dots, p_r$; $p_r = p$ -te Bettizahl von M^n) sei eine Basis der r -ten Kohomologiegruppe $H^r(M^n)$ von M^n .

Die Cup-Produkte der Basisklassen bestimmen die Cup-Matrizen

$$C_\alpha(p, q) = (c_\alpha^{ij}(p, q))$$

$$(1.1.11) \quad x_i^p \cup x_j^q = \sum_x c_\alpha^{ij}(p, q) x_\alpha^{p+q}$$

Aus der Vertauschungsregel (1.1.10) folgt die Symmetrieeigenschaft

$$(1.1.12) \quad C_\alpha(q, p) = (-1)^{pq} C_\alpha^t(p, q)$$

1.2

$\{x_i^r\}$, $i = 1, \dots, \alpha_r$, $r = 0, \dots, n$, sei ein kanonisches System von Basen - kurz: eine kanonische Basis - für die Kettengruppen von M mit rationalen Koeffizienten.

(vgl. [2], (Bd. II, S. 102); wir unterscheiden in jeder Dimension Nichtzyklen, Zyklen die keine Ränder sind, und die Ränder der Nichtzyklen aus der Basis der nächsthöheren Dimension.)

Diejenigen Zyklen unter den $\sum_r^i$, die keine Ränder sind, bilden eine Basis der r-ten Homologiegruppe $H_r(\mathcal{M})$ von $\mathcal{M}$. Aus der Darstellung eines Zyklus in einer kanonischen Basis kann man also unmittelbar die Darstellung der Homologieklassse des Zyklus in der zugehörigen (in der kanonischen Basis als Teil enthaltenen) Homologiebasis ablesen.

Mit Hilfe des Kroneckerproduktes bezüglich der Basis von $L_r(M)$, die aus den r-Simplexen von M besteht, definieren wir die - zu jeder Basis existierende und eindeutig bestimmte - zu $\sum_r^i$ duale Basis $\sum_i^r$ durch die Beziehung

$$(1.2.1) \quad \sum_r^i \circ \sum_j^r = \delta_j^i.$$

Die zu den Homologiebasiselementen dualen Elemente von $\sum_i^r$, $i = 1, \dots, \alpha_r$, $r = 0, \dots, m$, bilden ein System von Basen der Homologiegruppen $H^r(\mathcal{M})$ von $\mathcal{M}$.

Aus der Darstellung eines Kozyklus in der Basis $\sum_i^r$ kann man also die Homologieklassse des Kozyklus unmittelbar ablesen.

1.3

$f: M \longrightarrow N$ sei eine simpliziale Approximation der stetigen Abbildung $f: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ in die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ (vgl. 2.1), $\dim \mathcal{N} = n \leq m = \dim \mathcal{M}$.

Sie induziert Homomorphismen der Kettengruppen von M in die von N , die wir durch die Abbildung der Basen angeben (vgl. 2.2):

$$(1.3.1) \quad f_* \sum_i^r = \sum_j f_{ij}^r \sum_j^r \quad r = 0, \dots, n$$

$$(1.3.2) \quad f_* \sum_r^i = \sum_j f_j^{i(r)} \sum_r^j$$

Wegen $\partial f_r = f_r \partial$ induziert f Homomorphismen

$$f_r : H_r(\mathcal{M}) \longrightarrow H_r(\mathcal{N}) :$$

$$(1.3.3) \quad f_r x_r^i = \sum_j f_j^i(r) y_r^j$$

$(x_r^i, i = 1, \dots, p_r(\mathcal{M}))$ und $y_r^j, j = 1, \dots, p_r(\mathcal{N})$ seien Homologiebasen von $H_r(\mathcal{M})$ bzw. $H_r(\mathcal{N})$.

Die zu f duale Abbildung $f^* : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ ist definiert durch

$$(1.3.4) \quad e_i^r \circ f^* \eta_j^r = f e_i^r \circ \eta_j^r, \text{ also } f^* \eta_j^r = \sum_i f_{ij}^r e_i^r, \\ \text{und es gilt } \delta f^* = f^* \delta.$$

Die von f^* induzierten, zu f_r und f_r dualen Homomorphismen f_r^* und f_r^* lassen sich am einfachsten in der dualen Basis beschreiben:

$$(1.3.5) \quad f_r^* : L_r(\mathcal{N}) \longrightarrow L_r(\mathcal{M}) \quad f_r^* \eta_j^r = \sum_i f_{ij}^r e_i^r$$

$$(1.3.6) \quad f_r^* : H^r(\mathcal{N}) \longrightarrow H^r(\mathcal{M}) \quad f_r^* y_j^r = \sum_i f_{ij}^r(x) x_i^r$$

$$r = 0, \dots, n$$

f^* ist eine Ringabbildung des Konomologieringes von $\mathcal{N}$ in den Konomologiering von $\mathcal{M}$:

$$(1.3.7) \quad f_{p+q}^*(y_i^p \cup y_j^q) = f_p^* y_i^p \cup f_q^* y_j^q.$$

2. Mannigfaltigkeiten

2.1

Ein Polyeder $\mathcal{M}$, das sich als zusammenhängender, endlicher Simplicialkomplex M darstellen läßt, ist eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt von $\mathcal{M}$ eine Umgebung besitzt, die zum Inneren einer m -dimensionalen Vollkugel homöomorph ist.

Ein solches Polyeder ist eine m -dimensionale n -Mannigfaltigkeit, wenn die lokalen Homologiegruppen in jedem Punkt isomorph sind zu den lokalen Homologiegruppen des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^m$.

Jede Mannigfaltigkeit ist eine n -Mannigfaltigkeit, aber nicht jede n -Mannigfaltigkeit eine Mannigfaltigkeit; ([2] Bd. III, S. 4).

Wir betrachten hier nur orientierbare n -Mannigfaltigkeiten, d.h. solche, deren m -Simplexe sich so orientieren lassen, daß $\sum_m = \sum_i \mathcal{C}_i^m$ ein Zyklus ist. $\mathcal{M}$ ist orientiert, wenn einer der beiden möglichen Zyklen $\sum_m$ als Orientierungszyklus ausgezeichnet ist.

Wir erklären den Schnitt zwischen orientierten Simplexen von $\mathcal{M}$:

$$(2.1.1) \quad (a_0, \dots, a_\alpha, \dots, a_p) \wedge (a_\alpha, \dots, \bar{a}_p, \dots, a_m) = \\ = (a_\alpha, \dots, a_p) \left[(a_0, \dots, a_\alpha, \dots, a_m) \circ \sum_m \right].$$

$\mathcal{C}_i^p \wedge \mathcal{C}_j^q$ ist genau dann nicht null, wenn die Ecken von $\mathcal{C}_i^p$ und $\mathcal{C}_j^q$ zusammen ein m -simplex aufspannen.

Die Schnittzahl zweier Simplexe komplementärer Dimensionen ist der Koeffizient des nulldimensionalen Schnittsimplexes:

$$(2.1.2) \quad (a_0, \dots, a_p) \cdot (a_p, \dots, a_m) = (a_0, \dots, a_m) \circ \sum_m$$

2.2

Für vorgegebene Simplicialteilung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$ gibt es eine duale Zellteilung $\mathcal{M}^*$. Deren Zellen sind eineindeutig den Mitten der Simplexe von $\mathcal{M}$ zugeordnet. Wenn wir die natürliche Ordnung der Ecken in der baryzentrischen Unterteilung $\mathcal{M}_1$ von $\mathcal{M}$ heranziehen, lassen sich die Zellen folgendermaßen charakterisieren:

Die zum Simplex $\mathcal{C}_i^r$ duale Zelle $\tilde{\mathcal{C}}_i^{m-r}$ besteht aus allen Simplexen von $\mathcal{M}_1$, deren Ecke niedrigster Ordnung die Mitte von $\mathcal{C}_i^r$ ist.

Unter dem Außenrand von $\tilde{\mathcal{C}}_i^{m-r}$ verstehen wir diejenigen

$(m-r-1)$ -Simplexe von $\mathcal{M}_1$, die genau einem der $(m-r)$ -Simplexe aus $\tilde{\mathcal{C}}_i^{m-r}$ als Seite an gehören. Die Hülle des Außenrandes ist eine

orientierbare Pseudomannigfaltigkeit. Eine Orientierung des Außenrandes induziert eine Orientierung der Zelle $\tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r}$.

Die Summe der kohärent orientierten $(m-r)$ -Simplexe von $\tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r}$ nennen wir Orientierungskette von $\tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r}$. (Im Rand der Orientierungskette von $\tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r}$ haben genau die Simplexe des Außenrandes von $\tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r}$ nichtverschwindende Koeffizienten- und zwar +1.)

Zwischen einem Simplex $\mathcal{C}_i^r$ und der dualen Zelle $\tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r}$ erklären wir eine Schnittzahl. $(a_0, \dots, a_r) \in M_1$ sei ein mit der induzierten Orientierung versehenes Teilsimplex von $\mathcal{C}_i^r$, $(a_r, \dots, a_m)$ ein orientiertes Simplex aus der Orientierungskette von $\tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r}$.

Dann setzen wir

$$(2.2.1) \quad \mathcal{C}_i^r \cdot \tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r} = (a_0, \dots, a_r) \cdot (a_r, \dots, a_m).$$

$\tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r}$ sei im folgenden stets so orientiert, daß diese Schnittzahl +1 ist:

$$(2.2.2) \quad \mathcal{C}_i^r \cdot \tilde{\mathcal{C}}_i^{u-r} = +1$$

Aus [2] Bd. III, S. 17 ff entnehmen wir:

$$(2.2.3) \quad D^p \mathcal{C}_i^p = \tilde{\mathcal{C}}_i^{u-p} \quad D^p \sum_i u_i \mathcal{C}_i^p = \sum_i u_i \tilde{\mathcal{C}}_i^{u-p}$$

$$(2.2.4) \quad D^{p-1} \partial = (-1)^p \partial D^p \quad D^{p+1} \partial = (-1)^{p+1} \partial D^p$$

$$(2.2.5) \quad D_p \tilde{\mathcal{C}}_i^p = \mathcal{C}_i^{u-p}. \text{ Hierfür gelten analoge Formeln.}$$

2.3

Neben den Basen $\mathcal{J}_r^i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_r^i$, $i = 1, \dots, \alpha_r$, der r -ten Kettengruppe betrachten wir die beiden Basen $\tilde{\mathcal{J}}_r^i$ und $\tilde{\mathcal{J}}_r^i$, die durch Dualisierung von $\mathcal{J}_{u-r}^i$ und $\mathcal{J}_i^{u-r}$ entstehen. Wegen der Vereinbarung (2.2.2) ist $\mathcal{J}_r^i \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{u-r}^i = \delta_r^i$, diese beiden Basen sind also normiert.

$\tilde{\mathcal{J}}_r^i$, $i = 1, \dots, \alpha_r$ ist eine kanonische Basis, $\tilde{\mathcal{J}}_r^i$ ist zu ihr dual im Sinn von (1.2.1).

$\tilde{X}_i^j$ enthält die Homologiebasis $\tilde{X}_i^j$, $\tilde{X}_i^j$ die Konomologiebasis $\tilde{X}_i^j$, $i = 1, \dots, p_r(\mathcal{M})$.

$\tilde{X}_i^j$ und $\tilde{X}_i^j$ induzieren Isomorphismen zwischen $H^p(\mathcal{M})$ und $H_{m-p}(\mathcal{M})$, die wir durch die dabei zugeordneten Basisklassen angeben:

$$\begin{aligned} (2.3.1) \quad \tilde{X}_i^j &: x_i^j \longrightarrow \tilde{X}_{m-p}^j \\ (2.3.2) \quad \tilde{X}_i^j &: x_i^j \longrightarrow \tilde{X}_i^{m-p} \\ (2.3.3) \quad \tilde{X}_i^j &: \tilde{X}_i^p \longrightarrow x_{m-p}^j \\ &: \tilde{X}_i^j \longrightarrow x_i^{m-p} \end{aligned} \quad i = 1, \dots, p_r(\mathcal{M})$$

2.4

Für den in 2.1 definierten Schnitt zwischen Ketten aus $L_p(\mathcal{M})$ und $L_q(\mathcal{M})$ gelten folgende Formeln:

$$(2.4.1) \quad \partial(u_i^p \wedge v_j^q) = \partial u_i^p \wedge v_j^q + (-1)^{m-p} u_i^p \wedge \partial v_j^q$$

$$(2.4.2) \quad u_i^p \wedge v_j^q = (-1)^{(m-p)(m-q)} v_j^q \wedge u_i^p$$

Den Schnitt zwischen Ketten aus $L_p(\mathcal{M}^*)$ und $L_q(\mathcal{M}^*)$ erklären wir mit Hilfe des Cup-Produktes (1.1.6):

$$(2.4.3) \quad \tilde{u}_i^p \wedge \tilde{v}_j^q = D^{m-p-q} (D_p \tilde{u}_i^p \cup D_q \tilde{v}_j^q)$$

Auch hierfür gelten (2.4.1) und (2.4.2).

Analog definieren wir das Cup-Produkt zwischen Zellenketten mit Hilfe des Schnittes (2.1.1):

$$(2.4.4) \quad \tilde{u}_i^p \cup \tilde{v}_j^q = D^{m-p-q} (D_p \tilde{u}_i^p \wedge D_q \tilde{v}_j^q)$$

Auch für dieses Produkt gelten (1.1.8) und (1.1.10).

Schnitte zwischen Simplexketten und Zellenketten lassen sich mit Hilfe des Cap-Produktes erklären, (1.1.2).

Wir setzen dazu nach [9], §5:

$$a_{i_1, \dots, i_{p+q}}^\lambda = \text{Mitte von } (a_{i_1}, \dots, a_{p+q}).$$

Das entstehende Cap-Produkt bezeichnen wir mit $\cap^*$. Als Produkt zweier Simplexe erhält man eine Kette aus Simplexen von M_1 .

$$(2.4.5) \quad \tilde{u}_1^p \wedge v_j^q = \sum_i \tilde{u}_1^p \cap^* v_j^q$$

Aus der Randformel für $\cap^*$ folgt:

$$(2.4.6) \quad \partial(\tilde{u}_1^p \wedge v_j^q) = (-1)^{m-p} \partial \tilde{u}_1^p \wedge v_j^q + \tilde{u}_1^p \wedge \partial v_j^q$$

Alle hier angegebenen Schnitte induzieren denselben Schnitt zwischen Homologieklassen, da beiden $\cap$ -Produkte das gleiche Cup-Produkt zwischen Kohomologieklassen und schließlich die beiden Cap-Produkte das gleiche Cap-Produkt zwischen Kohomologieklassen und Homologieklassen.

Wir definieren analog zu (1.1.11) Schnitt- und Cup-Matrizen für die verschiedenen Homologie- und Kohomologiebasen.

$$(2.4.7) \quad S_\alpha(p, q) = (s_{ij}^\alpha(p, q))$$

$$x_p^i \wedge x_q^j = \sum_\alpha s_{ij}^\alpha(p, q) x_{p+q-m}^\alpha$$

$$S_\alpha(q, p) = (-1)^{(m-p)(m-q)} S_\alpha^T(p, q)$$

$$(2.4.8) \quad \tilde{S}_\alpha(p, q) = (\tilde{s}_{ij}^\alpha(p, q))$$

$$\tilde{x}_p^i \wedge \tilde{x}_q^j = \sum_\alpha \tilde{s}_{ij}^\alpha(p, q) \tilde{x}_{p+q-m}^\alpha$$

$$\tilde{S}_\alpha(q, p) = (-1)^{(m-p)(m-q)} \tilde{S}_\alpha^T(p, q)$$

$$(2.4.9) \quad \bar{S}_\alpha(p, q) = (\bar{s}_{ij}^\alpha(p, q))$$

$$\bar{x}_p^i \wedge \bar{x}_q^j = \sum_\alpha (-1)^{(m-p)(m-q)} \bar{s}_{ij}^\alpha(p, q) \bar{x}_{p+q-m}^\alpha$$

Kommutierungsregel wie oben.

$$\begin{aligned}
 (2.4.10) \quad \tilde{C}_\alpha(p,q) &= (\tilde{c}_\alpha^{ij}(p,q)) \\
 \tilde{x}_i^p \cup \tilde{x}_j^q &= \sum_\alpha \tilde{c}_\alpha^{ij}(p,q) \tilde{x}_\alpha^{p+q} \\
 \tilde{C}_\alpha(q,p) &= (-1)^{pq} \tilde{C}_\alpha(p,q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.4.11) \quad \bar{C}_\alpha(p,q) &= (\bar{c}_\alpha^{ij}(p,q)) \\
 \bar{x}_i^p \cup \bar{x}_j^q &= \sum_\alpha (-1)^{pq} \bar{c}_\alpha^{ij}(p,q) x_\alpha^{p+q}
 \end{aligned}$$

Kommutierungsregel wie oben.

Der Übergang von der Ausgangsbasis zur dualen Basis der Homologiegruppen wird durch die Überführungsmatrizen U_r ($r = 0, \dots, m$) beschrieben:

$$(2.4.12) \quad x_r = U_r \tilde{x}_r$$

(x_r ist der Spaltenvektor der Homologiebasis x_r^1 , $\tilde{x}_r$ der Spaltenvektor der Basis $\tilde{x}_r^1$, $i = 1, \dots, p_r$).

Die verschiedenen Schnittmatrizen lassen sich mit Hilfe der Überführungsmatrizen ineinander umrechnen. Es ist z.B.

$$(2.4.13) \quad \bar{S}_\alpha(p,q) = (-1)^{(m-p)(m-q)} U_p^{-1} S_\alpha(p,q) U_q^{-T}.$$

Speziell gilt für $q = m - p$

$$\begin{aligned}
 x_p \wedge x_{m-p}^T &= S(p, m-p) = U_{m-p}^T \quad \bar{S}(p, m-p) = U_{m-p}^{-T} \\
 (2.4.14) \quad \bar{S}(p, m-p) &= S^{-1}(p, m-p)
 \end{aligned}$$

(2.4.13) ist in diesem Falle die Symmetrieeigenschaft

$$(2.4.15) \quad U_{m-p} = (-1)^{p(m-p)} U_p^T.$$

2.5

Außer den beiden Homomorphismen f_r und f_r^* , die auch für Abbildungen beliebiger Polyeder definiert sind, erklären wir durch $f_r' = D^r f_r^* D_{n-r}$ (D^r ist in $\mathcal{M}$, D_{n-r} in $\mathcal{N}$ zu nehmen) den Homomorphismus

$$(2.5.1) \quad f_r' : L_{n-r}(K^*) \longrightarrow L_{n-r}(K^*),$$

der den Hopfschen Umkehrhomomorphismus

$$(2.5.2) \quad r_r' : H_{n-r}(\mathcal{N}) \longrightarrow L_{n-r}(\mathcal{M})$$

induziert.

r_r' ist eine Ringabbildung des Homologieringes von $\mathcal{N}$ in den Homologiering von $\mathcal{M}$:

$$(2.5.3) \quad r_{2n-p-q}'(\tilde{y}_p^i \wedge \tilde{y}_q^j) = r_{n-p}'\tilde{y}_p^i \wedge r_{n-q}'\tilde{y}_q^j$$

Aus (1.5.6) erhalten wir durch Dualisierung

$$(2.5.4) \quad r_r' \tilde{y}_{n-r}^j = \sum_i \tilde{x}_i^1(r) \tilde{x}_{n-r}^i$$

Die entsprechenden Bezeichnungen in der Silbmannigkeit

$\mathcal{N}$ seien:

Simplexe $\mathcal{W}_i^r$, kanonische Basis $\mathcal{W}_i^1$, Cup-Matrizen $\mathcal{D}_\alpha(p,q)$, Schnittmatrizen $\mathcal{D}_\alpha(p,q)$, Überführungsmatrizen V_r .

3. Produkträume

Wir geben nur die in dieser Arbeit verwendeten Formeln an.

Wegen weiterer Einzelheiten vgl. [1] S. 299-309.

Ist ξ_p^i , $i = 1, \dots, \alpha_p$ eine Basis von $L_p(M)$, $p = 0, \dots, n$,

und η_q^j , $j = 1, \dots, \alpha_q$ eine Basis von $L_q(N)$, $q = 1, \dots, n$,

so ist $\xi_p^i \times \eta_{r-p}^j$, $i = 1, \dots, \alpha_p$, $j = 1, \dots, \alpha_q$, $p = 0, \dots, r$ eine Basis von $L_r(M \times N)$.

Nennen wir für $\{\xi_p^i\}$ und $\{\eta_q^j\}$ je eine kanonische Basis, so bilden die Produkte derjenigen Zyklen, die keine Ränder sind, ein System von Homologiebasen von $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

Auch bei Zyklen in Produkträumen kann man also aus einer Darstellung mit Hilfe kanonischer Basen unmittelbar die Homologiekategorie des Zyklus ablesen, analog die Konomologiekategorie eines Kozyklus aus der Darstellung durch die dualen Basen.

Es gilt (mit den Basen aus 1.2):

$$(3.1.1) \quad \partial(\xi_p^i \times \eta_q^j) = \partial \xi_p^i \times \eta_q^j + (-1)^p \xi_p^i \times \partial \eta_q^j$$

$$(3.1.2) \quad (\xi_p^i \times \eta_q^j) \wedge (\xi_r^k \times \eta_s^l) = (-1)^{(m-r)(n-q)} (\xi_p^i \wedge \xi_r^k) \times (\eta_q^j \wedge \eta_s^l)$$

$$(3.1.3) \quad (\xi_p^i \times \eta_q^j) \cup (\xi_r^k \times \eta_s^l) = (-1)^{rq} (\xi_p^i \cup \xi_r^k) \times (\eta_q^j \cup \eta_s^l)$$

$$(3.1.4) \quad \partial(\tilde{\xi}_p^i \times \eta_q^j) = \partial \tilde{\xi}_p^i \times \eta_q^j + (-1)^p \tilde{\xi}_p^i \times \partial \eta_q^j$$

$$(3.1.5) \quad (\tilde{\xi}_p^i \times \eta_q^j) \wedge (\tilde{\xi}_r^k \times \eta_s^l) = (-1)^{(m-p)(n-s)} (\tilde{\xi}_p^i \wedge \tilde{\xi}_r^k) \times (\eta_q^j \wedge \eta_s^l)$$

(3.1.6) Dual und normiert im Sinne von 2.3 sind z.B. die

$$\text{Basiselemente } \xi_p^1 \times \tilde{\eta}_q^j \text{ und } (-1)^{p(n-q)+p(m-p)} \tilde{\xi}_{m-p}^1 \times \eta_{n-q}^j.$$

(3.1.7) Dual im Sinn von 1.3 sind z.B.

$$\xi_p^1 \times \eta_q^j \text{ und } \xi_p^1 \times \eta_q^j \text{ oder } \tilde{\xi}_p^1 \times \tilde{\eta}_q^j \text{ und } \tilde{\xi}_p^1 \times \tilde{\eta}_q^j.$$

Die entsprechenden Formeln für Homologie- bzw. Konomologieklassen lauten gleich. So ist z.B.

$$(\xi_p^1 \times \eta_q^j) \wedge (\xi_r^k \times \eta_s^l) = (-1)^{(m-r)(n-q)} (\xi_p^1 \wedge \xi_r^k) \times (\eta_q^j \wedge \eta_s^l)$$

u.s.w.

Aus der Formel (2.2.4) und der Tatsache, daß ∂ und δ duale Homomorphismen sind, folgt die Gleichung

$$(3.1.8) \quad \sum_j \eta_j^r \times \delta \tilde{\eta}_j^{n-r} = (-1)^r \sum_i \delta \tilde{\eta}_i^{r-1} \times \tilde{\eta}_i^{n-r+1}.$$

II. Konomologietheorie der Koinzidenzen

=====

4. Der Graph von f

4.1

Die n -dimensionale Konomologiekasse

$$(4.1.1) \quad (f)^n = \sum_{r=0}^n (-1)^r f_{r,1}^* \times \tilde{y}_1^{n-r}$$

von $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ ist der Abbildung f invariant gegenüber Änderungen innerhalb ihres Homologietypus zugeordnet.

Wir wollen den Zusammenhang dieser Klasse mit dem Graphen der Abbildung f und damit ihre Form begründen.

Der Graph von f ist die Punktmenge

$$[f] = \{ p \times f(p) \mid p \in \mathcal{M} \} = \{ p \times q \mid q \in \mathcal{N}, p \in f^{-1}(q) \}$$

Dabei ist unter $f^{-1}(q)$ die Menge der Urbilder von q zu verstehen, also die leere Menge, wenn q nicht in $f(\mathcal{M})$ liegt.

Die zweite Schreibweise legt nahe, dem Graphen analog zu [4], S. 37 die n -dimensionale Kette

$$(f)^n = \sum_{r=0}^n \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^r (f^* \mathcal{M}_i^r \times \tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r})$$

zuzuordnen. f^* ist die in (1.4.5) definierte Abbildung.

Die Simplexe $\mathcal{M}_i^r$ bzw. die Zellen $\tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r}$ sind als Basis der Kettengruppe der Dimension r bzw. $n-r$ von N aufzufassen.

$\alpha(r)$ ist die Anzahl der r -dimensionalen Simplexe von N .

Wir rechnen nach, daß $(f)^n$ ein Kozyklus ist:

$$\begin{aligned} \delta(f)^n &= \sum_{r=0}^n \sum_i [(-1)^r \delta f^* \mathcal{M}_i^r \times \tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r} + f^* \mathcal{M}_i^r \times \delta \tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r}] \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_i [(-1)^r f^* \delta \mathcal{M}_i^r \times \tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r} + f^* \mathcal{M}_i^r \times \delta \tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r}] \end{aligned}$$

Da für $r = n$ der erste Summand verschwindet, für $r = 0$ der

zweite, können wir dafür schreiben: (mit (3.1.8)):

$$\begin{aligned} \delta(f)^n &= \sum_{r=0}^n [(-1)^{r-1} \sum_i f^* \delta \mathcal{M}_i^{r-1} \times \tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r+1} + \sum_i f^* \mathcal{M}_i^{r-1} \times \delta \tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r+1}] \\ &= \sum_{r=1}^n [(-1)^{r-1} \sum_i f^* \delta \mathcal{M}_i^{r-1} \times \tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r+1} + (-1)^r \sum_i f^* \mathcal{M}_i^{r-1} \times \delta \tilde{\mathcal{M}}_i^{n-r+1}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

4.2

Um die Klasse zu bestimmen, in der der Kozyklus $(f)^n$ liegt, gehen wir zu der Darstellung durch eine kanonische Basis über.

Nach (1.3.1) ist

$$f e_i^r = \sum_j f_{ij}^r \eta_j^r, \quad \text{also} \quad f^* \eta_j^r = \sum_i f_{ij}^r e_i^r$$

Setzen wir nun

$$f e_i^r = \sum_j \bar{f}_{ij}^r(r) \eta_j^r, \quad \eta_j^r = \sum_k a_k^j(r) \eta_k^r,$$

so wird

$$\sum_j \bar{f}_{ij}^r(r) a_k^j(r) = f_{ik}^r \quad \text{und} \quad f_r^* \eta_j^r = \sum_i \bar{f}_{ij}^r(r) e_i^r.$$

$$\begin{aligned} (f)^n &= \sum_{r,i} (-1)^r f^* \eta_i^r \times \tilde{\eta}_i^{n-r} \\ &= \sum_{r,i} (-1)^r \sum_j f_{ij}^r e_j^r \times \tilde{\eta}_i^{n-r} \\ &= \sum_{r,i,j} (-1)^r \sum_k \bar{f}_{ik}^r(r) a_k^j(r) e_j^r \times \tilde{\eta}_i^{n-r} \\ &= \sum_{r,i,j,k} (-1)^r \bar{f}_{ik}^r(r) e_j^r \times a_k^j(r) \tilde{\eta}_i^{n-r} \\ &= \sum_{r,k} (-1)^r f_r^* \eta_k^r \times \tilde{\eta}_k^{n-r}. \end{aligned}$$

An dieser Darstellung erkennt man unmittelbar, daß die Kohomologieklassse von $(f)^n$ die oben (4.1.1) angegebene Klasse $(f)^n$ ist.

5. Die Koinzidenzklasse

5.1

Wir bilden das Cup-Produkt der Klassen $(f)^n$ und $(g)^n$.

$$\begin{aligned} (f)^n \cup (g)^n &= \left(\sum_{r,i} (-1)^r f_r^* \eta_i^r \times \tilde{\eta}_i^{n-r} \right) \cup \left(\sum_{s,j} (-1)^s g_s^* \eta_j^s \times \tilde{\eta}_j^{n-s} \right) \\ (5.1.1) \quad &= \sum_{r,s,i,j} (-1)^{g(n-r)+r+s} (f_r^* \eta_i^r \cup g_s^* \eta_j^s) \times (\tilde{\eta}_i^{n-r} \cup \tilde{\eta}_j^{n-s}) \\ &= \sum_{r,s,i,j,k,l} (-1)^{g(n-r)+r+s} f_1^k(r) g_j^l(s) (x_k^r \cup x_l^s) \times (\tilde{y}_1^{n-r} \cup \tilde{y}_j^{n-s}) \\ &= \sum_{r,s,i,j,k,l,\mu,\lambda} (-1)^{g(n-r)+r+s} f_1^k(r) g_j^l(s) c_{\mu}^{kl}(r,s) \tilde{d}_{\lambda}^{kl}(n-r,n-s) \\ &\quad \cdot [x_{\mu}^{r+s} \times \tilde{y}_{\lambda}^{2n-r-s}] \end{aligned}$$

$$(5.1.2) \quad = \sum_{r, g, \mu, \lambda} (-1)^{g(n-r)+r, g} \text{Sp}(\tilde{D}_{\lambda}(n-r, n-g)) G_{\mu}^T(r, g) F_r [x_{\mu}^{r+g} \times \tilde{y}_{\lambda}^{2n-r-g}]$$

Damit die angeschriebene Formel sinnvoll ist, müssen r und g den beiden einschränkenden Bedingungen $r+g \leq n$ und $n \geq 2n - r - g \geq 0$ genügen.

Wir setzen $g = n - r + v$ mit $0 \leq v \leq d$ und erhalten $r + g = n + v$, $2n - r - g = n - v$.

Eine naheliegende Aufspaltung der Klasse $(r)^n \cup (g)^n$, entsprechend den Werten von v , liefert die Klassen

$$\begin{aligned} (5.1.3) \quad (r, g)^v &= (-1)^{v(n+v)} \sum_{r, \mu, \lambda} (-1)^{r(v+v)} (r^*_{r, \mu} \cup g^*_{n-r+v, \mu} y_j^{n-r+v}) \times \\ &\quad \times (\tilde{y}_i^{n-r} \cup \tilde{y}_j^{r-v}) \\ &= (-1)^{v(n+v)} \sum_{r, \mu, \lambda} (-1)^{r(v+v)} \text{Sp}(\tilde{D}_{\lambda}(n-r, n-v)) G_{\mu}^T(r, n-v) \\ &\quad C_{\mu}^T(r, n-r+v) F_r (x_{\mu}^{n+v} \times \tilde{y}_{\lambda}^{n-v}) \end{aligned}$$

5.2

Als Projektion der Klasse $(r, g)^0$ nach $\mathcal{M}$ erhalten wir die Koinzidenzklasse

$$\begin{aligned} (5.2.1) \quad j^n(r, g) &= \sum_{r, \mu, \lambda} (-1)^r [(\tilde{y}_i^{n-r} \cup \tilde{y}_j^r) \cdot \tilde{y}_n] (r^*_{r, \mu} \cup g^*_{n-r, \mu} y_j^{n-r}) \\ &= \sum_{r, \mu} (-1)^r \text{Sp}(\tilde{D}(n-r, r)) G_{\mu}^T(r, n-r) C_{\mu}^T(r, n-r) F_r x_{\mu}^n, \end{aligned}$$

die invariant ist gegenüber Änderungen der Abbildungen r und g innerhalb ihres Homologietypus.

$j^n(r, g)$ ist also insbesondere eine Invariante der Abbildungsklasse (r, g) .

Die Bezeichnung von $j^n(r, g)$ als Koinzidenzklasse ist dadurch gerechtfertigt, daß die in einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ zu $j^n(r, g)$ duale Homologieklass $j_d(r, g)$ als Klasse des Koinzidenzgebildes der Abbildungen r und g gedeutet werden kann (Abschnitt 10).

o. Eine Beziehung zwischen $j^n(r, g)$ und $(f, g)^v$

für rechnen zunächst nach, daß man $(f, g)^v$ auch in der folgenden Form darstellen kann:

$$(o.1.1.) \quad (f, g)^v = (-1)^{vn} \sum_{r, i, l} (-1)^{rn} (f_{r, i}^{*r} \cup g_{n-r+v}^{*r} (\tilde{y}_i^{n-r} \cup \tilde{y}_l^v)) \times y_1^{n-v}.$$

Dazu setzen wir

$$(6.1.2) \quad \tilde{y}_i^{n-r} \cup \tilde{y}_l^v = \sum_j a_j^{il}(n-r, v) y_j^{n-r+v}$$

$$(6.1.3) \quad \tilde{y}_i^{n-r} \cup y_j^{r-v} = \sum_l a_l^{ij}(n-r, r-v) y_l^{n-v}$$

in (6.1.2) und (6.1.1) ein und erhalten die beiden Darstellungen

$$(f, g)^v = (-1)^{v(n+v)} \sum_{r, i, l} (-1)^{r(v+i)} a_l^{ij}(n-r, r-v) (f_{r, i}^{*r} \cup g_{n-r+v}^{*r} y_j^{n-r+v}) \times y_1^{n-v}$$

$$(f, g)^v = (-1)^{vn} \sum_{r, i, l} (-1)^{rn} a_j^{il}(n-r, v) (f_{r, i}^{*r} \cup g_{n-r+v}^{*r} y_j^{n-r+v}) \times y_1^{n-v}$$

Aus (6.1.2) folgt wegen der Normierung der dualen Basen

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i^{n-r} \cup \tilde{y}_l^v \cup y_j^{r-v} &= a_j^{il}(n-r, v) y_j^{n-r+v} \cup y_j^{r-v} \\ &= (-1)^{(r-v)(n-r+v)} a_j^{il}(n-r, v) y^n, \end{aligned}$$

aus (6.1.3) entsprechend

$$\tilde{y}_i^{n-r} \cup y_j^{r-v} \cup \tilde{y}_l^v = (-1)^{v(n-v)} a_l^{ij}(n-r, r-v) y^n.$$

Die beiden linken Seiten sind gleich bis auf das Vorzeichen

$(-1)^{v(r-v)}$, das sich aus der Vertauschung von $\tilde{y}_j^{r-v}$ und $\tilde{y}_l^v$

ergibt, also ist

$$a_j^{il}(n-r, v) = (-1)^{r(n+v) + r + v} a_l^{ij}(n-r, r-v)$$

Damit ist gezeigt, daß (6.1.1) die selbe Komologiekategorie darstellt, wie (6.1.2).

Die (6.1.1) entsprechende Schreibweise für $j^n(r, g)$ ist die von Leischetz angegebene ([6] S. 278):

$$(6.1.4) \quad j^n(r, g) = \sum_{r, i} (-1)^{rn} f_{r, i}^{*r} \cup g_{n-r}^{*r} \tilde{y}_i^{n-r}$$

Die Produkttreue von g^* und die Assoziativität des Cup-
Produktes ermöglichen in (6.1.1) die Umformungen

$$\begin{aligned} (f, g)^v &= (-1)^{vn} \sum_{r, l} (-1)^{rn} [i_{r, j_1}^* \cup (\varepsilon_{n-r}^* \tilde{j}_1^{n-r} \cup \varepsilon_v^* j_1^v) \times j_1^{n-v}] \\ &= (-1)^{vn} \sum_l \left\{ \left[\sum_{r, l} (-1)^{rn} i_{r, j_1}^* \cup \varepsilon_{n-r}^* \tilde{j}_1^{n-r} \right] \cup \varepsilon_v^* j_1^v \right\} \times j_1^{n-v} \\ (6.1.5) \quad (f, g)^v &= (-1)^{vn} j^n(f, g) \sum_l \varepsilon_v^* j_1^v \times j_1^{n-v}. \end{aligned}$$

FOLGERUNG: Ist $j^n(f, g) = 0$, so sind auch alle $(f, g)^v = 0$,
 $v = 0, \dots, n$.

Die $(f, g)^v$ leisten also sicher keine feinere Klassifizierung
der Abbildungsklassen (f, g) mit verschwindender Invarianten
 $j^n(f, g)$.

7. Die Hopfsche Definition der Koinzidenzklasse

7.1

Bei Hopf [6] finden wir folgende Definition:

Die Abbildung $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ sei durch die Vorschrift
 $\varphi(x) = i(x) \times g(x)$, $x \in \mathcal{M}$, erzeugt.

Die algebraische Anzahl der Koinzidenzpunkte von f und g auf
einem n -dimensionalen Zyklus ζ_n von $\mathcal{M}$ ist die Schnittzahl
des Zyklus $\varphi(\zeta_n)$ mit der Diagonalen in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Diese Zahl ist eine Invariante der Homologieklassse $\bar{\zeta}_n$ von ζ_n .
Die dadurch erklärte Funktion der n -dimensionalen Homologie-
klassen stellt eine n -dimensionale Kohomologieklassse dar,
die Klasse der Koinzidenzkozyklen von f und g .

Wir wollen zeigen, daß die so definierte Koinzidenzklasse
mit $j^n(f, g)$ identisch ist.

7.2

Als Darstellung von $\varphi(\{n\})$ wählen wir die Kette

$$(7.2.1) \quad p(\{n\}) = \sum_{i,j} [(\varphi_i^r \cup \varphi_j^{n-r}) \circ \{n\}] [\{ \varphi_i^r \times \eta \varphi_j^{n-r} \}]$$

Summiert wird über alle Simplexpaare $\varphi_i^r, \varphi_j^{n-r}$.

Das Cup-Produkt ist im Sinne von (1.1.0) zu verstehen.

Der Koeffizient in der eckigen Klammer ist also genau für diejenigen Simplexpaare von Null verschieden, die zusammen ein n -Simplex aufspannen, auf dem $\{n\}$ nicht null ist.

$p(\{n\})$ ist ein Zyklus:

$$\begin{aligned} \partial p(\{n\}) &= \sum_{r=0}^n \sum_{i,j} [(\varphi_i^r \cup \varphi_j^{n-r}) \circ \{n\}] [\{ \partial \varphi_i^r \times \eta \varphi_j^{n-r} + (-1)^r \varphi_i^r \times \eta \partial \varphi_j^{n-r} \}] \\ &= \sum_{r=0}^n \left\{ \sum_{i,j} [(\varphi_i^r \cup \varphi_j^{n-r}) \circ \{n\}] [\{ \partial \varphi_i^r \times \eta \varphi_j^{n-r} \}] + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{r-1} \sum_{i,j} [(\varphi_i^{r-1} \cup \varphi_j^{n-r+1}) \circ \{n\}] [\{ \varphi_i^{r-1} \times \eta \partial \varphi_j^{n-r+1} \}] \right\} \end{aligned}$$

(Die beiden trivialerweise verschwindenden Summanden mit $\partial \varphi^0$ sind weggelassen und die dadurch verschiedenen gewordenen Summationsgrenzen für r wieder gleich gemacht durch Umbenennung des Summationsindex im rechten Summanden.)

∂ und σ sind duale Homomorphismen. Also gilt:

$$\varphi_i^{r-1} \circ \partial \varphi_i^r = \sigma \varphi_i^{r-1} \circ \varphi_i^r, \quad \varphi_j^{n-r} \circ \partial \varphi_j^{n-r+1} = \sigma \varphi_j^{n-r} \circ \varphi_j^{n-r+1}$$

Damit können wir weiter umformen:

$$\begin{aligned} \partial p(\{n\}) &= \sum_{r=1}^n \left\{ \sum_{i,j} [(\sigma \varphi_i^{r-1} \cup \varphi_j^{n-r}) \circ \{n\}] [\{ \varphi_i^{r-1} \times \eta \varphi_j^{n-r} \}] + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{r-1} \sum_{i,j} [(\varphi_i^{r-1} \cup \sigma \varphi_j^{n-r}) \circ \{n\}] [\{ \varphi_i^{r-1} \times \eta \varphi_j^{n-r} \}] \right\} \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{i,j} [\sigma (\varphi_i^{r-1} \cup \varphi_j^{n-r}) \circ \{n\}] [\{ \varphi_i^{r-1} \times \eta \varphi_j^{n-r} \}] \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{i,j} [(\varphi_i^{r-1} \cup \varphi_j^{n-r}) \circ \partial \{n\}] [\{ \varphi_i^{r-1} \times \eta \varphi_j^{n-r} \}] \\ &= 0, \text{ da } \{n\} \text{ ist ein Zyklus.} \end{aligned}$$

Die Homologieklassse von $p(\gamma_n)$ berechnen wir wieder mit Hilfe der Darstellung durch eine kanonische Basis.

Wir setzen:

$$\gamma_1^r = \sum_{\mathbf{r}} u_1^{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{\mathbf{r}}, \quad \gamma_1^{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{k}}.$$

Weil $\{\gamma_1^{\mathbf{r}}\}$ und $\{\gamma_1^{\mathbf{r}}\}$ duale Basen sind, gilt:

$$\varphi_i^{\mathbf{r}} \circ \varphi_j^{\mathbf{r}} = \delta_{ij}^{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) v_{\mathbf{k}}^{\mathbf{r}}(\mathbf{r})$$

$$\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{i}} v_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}(\mathbf{r}) \varphi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}} \quad \gamma_1^{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{i}} u_1^{\mathbf{i}}(\mathbf{r}) \varphi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}}$$

$$\delta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{k}} \circ \gamma_1^{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{i}} v_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}(\mathbf{r}) u_1^{\mathbf{i}}(\mathbf{r}).$$

$$\begin{aligned} p(\gamma_n) &= \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{i}, \mathbf{j}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} v_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}(\mathbf{r}) u_{\mathbf{l}}^{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \sum_{\mathbf{g}} v_1^{\mathbf{g}}(\mathbf{n}-\mathbf{r}) u_{\mathbf{g}}^{\mathbf{h}}(\mathbf{n}-\mathbf{r}) \left[(\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \cup \gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}}) \circ \gamma_{\mathbf{g}}^{\mathbf{h}} \right] \left[\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \times \gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}} \times \gamma_{\mathbf{g}}^{\mathbf{h}} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{g}} \delta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{j}}^{\mathbf{l}} \left[(\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \cup \gamma_1^{\mathbf{n}-\mathbf{r}}) \circ \gamma_{\mathbf{g}}^{\mathbf{h}} \right] \left[(\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \times \gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}} \times \gamma_{\mathbf{g}}^{\mathbf{h}}) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{i}, \mathbf{j}} \left[(\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \cup \gamma_1^{\mathbf{n}-\mathbf{r}}) \circ \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} \right] \left[\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \times \gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}} \times \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} \right]. \end{aligned}$$

Da Cup- und Kroneckerprodukt zwischen Kohomologieklassen bzw. Homologie- und Homologieklassen repräsentantenweise erklärt sind, erhalten wir die Homologieklassse von $p(\gamma_n)$ in der Form

$$(7.2.2) \quad p(\gamma_n) = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{i}, \mathbf{j}} \left[(\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \cup \gamma_1^{\mathbf{n}-\mathbf{r}}) \circ \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} \right] (\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \times \gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}} \times \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}).$$

7.3

Wählen wir $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, $1 = g = \text{Identität}$, $\gamma_n = \text{Grundzyklus}$ η_n der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$, so wird $p(\gamma_n)$ zu einer der Diagonalen von $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ zugeordneten Homologieklassse:

$$(7.3.1) \quad p(\gamma_n) = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{i}, \mathbf{j}} \left[(\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \cup \gamma_1^{\mathbf{n}-\mathbf{r}}) \circ \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} \right] \left[\gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{i}} \times \gamma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{j}} \times \gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} \right].$$

Die andere Basis ist zur Vereinfachung der folgenden Rechnung gewählt.

Die Anzahl der Koinzidenzpunkte auf $\bar{J}_n$ berechnen wir als Schnittzahl der beiden Klassen $P(\bar{J}_n)$ und $D(y_n)$, denn diese ist gleich der Schnittzahl der Zyklen $p(\bar{J}_n)$ und $d(y_n)$.

Die offensichtliche Klasseninvarianz drücken wir durch die Bezeichnung $n(\bar{J}_n)$ aus.

$$\begin{aligned} n(\bar{J}_n) &= P(\bar{J}_n) \cdot D(y_n) = \sum_{r, g, i, j, k, \ell} [(x_i^r \cup x_j^{n-r}) \circ \bar{J}_n] [(\tilde{y}_k^g \cup \tilde{y}_\ell^{n-g}) \circ \tilde{y}_n] \\ &\quad [i_r^* x_r^i \times g_{n-r} x_{n-r}^j] \cdot [\tilde{y}_g^k \times \tilde{y}_{n-g}^1] \\ &= \sum_{r, g, i, j, k, \ell} (-1)^{r(n-g)} [\quad] [\quad] [i_r^* x_r^i \cdot \tilde{y}_g^k] [g_{n-r} x_{n-r}^j \cdot \tilde{y}_{n-g}^1] \end{aligned}$$

Alle Terme mit $g \neq n - r$ sind trivialerweise null. Für

$g = n - r$ nützen wir die Normierung aus und erhalten:

$$\begin{aligned} n(\bar{J}_n) &= \sum_{r, k, \ell, i, j} (-1)^r [(x_i^r \cup x_j^{n-r}) \circ \bar{J}_n] [(\tilde{y}_k^{*r} \cup \tilde{y}_\ell^r) \circ \tilde{y}_n] i_k^1(r) g_\ell^j(n-r) \\ (7.3.2) \quad &= \sum_{r, k, \ell} (-1)^r [(i_r^* y_k^r \cup g_{n-r}^* y_\ell^{n-r}) \circ \bar{J}_n] [(\tilde{y}_k^{n-r} \cup \tilde{y}_\ell^r) \circ \tilde{y}_n] \end{aligned}$$

Die der Funktion $n(x_n^1)$ zugeordnete Kohomologiekategorie ist

$\sum_i n(x_n^1) x_i^n$. Wir setzen (7.3.2) ein und beachten, daß für eine beliebige Kohomologiekategorie a^p das Produkt $a^p \cdot x_p^k$ der Koeffizient von x_k^p in a^p ist. Dann erhalten wir:

$$\sum_i n(x_n^1) x_i^n = \sum_{r, k, \ell} (-1)^r [(\tilde{y}_k^{n-r} \cup \tilde{y}_\ell^r) \circ \tilde{y}_n] [i_r^* y_k^r \cup g_{n-r}^* y_\ell^{n-r}] \cdot$$

Der Vergleich mit (5.2.1) zeigt

$$(7.3.3) \quad \sum_i n(x_n^1) x_i^n = j^n(r, g).$$

8. Spezialfälle

8.1

$g = \text{const.}$, r beliebig

$(f, g)^v = 0$ für $v > 0$, denn $g_{n-r+v}^* = 0$ für $n-r+v > 0$.

$j^n(r, \text{const.}) = (-1)^{n-r} i_r^* y^n = \text{Grad von } f$.

8.2

f und g sind homotop.

$$(f, 1)^v = (-1)^{v(n+1)} \sum_{r, i, j} (-1)^{r(v+1)} f_{n+v}^* (y_1^r \cup y_j^{n-r+v}) \times (\tilde{f}_1^{n-r} \cup \tilde{f}_j^{r-v}) =$$

$$= 0 \text{ für } v > 0, \text{ weil } f_{n+v}^* = 0 \text{ für } v > 0.$$

$$j^n(f, r) = \sum_{r, i} (-1)^r f_n^* (y_1^r \cup y_i^{n-r}) = \sum_r (-1)^r p_r f_n^* y^n = \chi(\mathcal{N}) f_n^* y^n,$$

p_r = r -te Bettizahl von $\mathcal{N}$, $\chi(\mathcal{N})$ = Eulersche Charakteristik von $\mathcal{N}$.

$$j^n(r, f) = (-1)^n \chi(\mathcal{N}) j^n(f, \text{const.}).$$

8.3

$$\mathcal{N} = S^n.$$

$$j^n(r, g) = (-1)^n f_n^* y^n + g_n^* y^n.$$

9. Normalform

Gegeben ist ein m -dimensionales, endliches Polyeder $\mathcal{M}$ und eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. M und N seien simpliziale Zerlegungen von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$.

(f, g) sei ein Paar stetiger Abbildungen von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$.

Das Koinzidenzgebilde von f und g

$$K(f, g) = \left\{ q \in \mathcal{M} \mid f(q) = g(q) \right\}$$

ist eine abgeschlossene Punktmenge in $\mathcal{M}$.

Ein bei Schirmer [10] angewandtes Verfahren etwas verallgemeinernd, konstruieren wir eine zu f homotope Abbildung f' mit der Eigenschaft, daß - $m \geq n$ vorausgesetzt - $K(f', g)$ ein höchstens $(m-n)$ -dimensionales Teilpolyeder einer genügend feinen Simplicialunterteilung von $\mathcal{M}$ ist.

Für $m < n$ ist $K(f', g)$ die leere Menge, f' und g sind koinzidenzfrei.

2.1

$\mathcal{K}^n$ sei eine n -dimensionale Einheitsvollikugel, $\bar{\mathcal{K}}_\varepsilon^n$ und $\dot{\mathcal{K}}_1^n$ die zu ihr konzentrischen Kugeln mit Radius $(1+\varepsilon)$ und $1/2$, $(\varepsilon > 0)$.

Da $\mathcal{N}$ eine Mannigfaltigkeit ist, besitzt jeder Punkt $p \in \mathcal{N}$ eine zu $\bar{\mathcal{K}}_\varepsilon^n - \dot{\mathcal{K}}_\varepsilon^n$ homöomorphe Umgebung. Wir wählen zu jedem p eine Umgebung und einen festen Homöomorphismus φ_p aus und definieren durch

$$(9.1.1) \quad V_p^* = \varphi_p^{-1}(\bar{\mathcal{K}}^n - \dot{\mathcal{K}}^n) \text{ und } V_p = \varphi_p^{-1}(\bar{\mathcal{K}}_1^n - \dot{\mathcal{K}}_1^n)$$

Umgebungen von p , deren Hüllen $\overline{V_p^*}$ und $\overline{V_p}$ zu $\bar{\mathcal{K}}^n$ und $\bar{\mathcal{K}}_1^n$ homöomorph sind.

Da $\mathcal{N}$ kompakt ist, können wir aus der Überdeckung $\{V_p\}$ eine endliche Überdeckung $\{V_1, \dots, V_l\}$ aussondern. Für deren Elemente und für die zugehörigen V_i^* gilt nach (9.1.1)

$$\varphi_i(\overline{V_i^*}) = \bar{\mathcal{K}}^n, \quad \varphi_i(\overline{V_i}) = \bar{\mathcal{K}}_1^n; \quad i=1, \dots, l.$$

$\tau > 0$ sei die zur Überdeckung $\{V_1, \dots, V_l\}$ existierende Zahl mit der Eigenschaft, daß jede Menge $A \subset \mathcal{N}$, deren Durchmesser $d(A) < \tau$ ist, ganz in einem V_i liegt (Lebesgue-Zahl, Franz [5], S. 22).

Die gleichmäßige Stetigkeit von φ_i auf $\overline{V_i}$ ausnützend, bestimmen wir der Reihe nach Zahlen $\varepsilon_j > 0$ ($j = m+1, \dots, 0$) so, daß folgendes gilt:

$$(9.1.2) \quad \varepsilon_{m+1} = 1/4 \tau$$

für alle $x, y \in \overline{V_i^*}$ folgt aus $d(\varphi_i x, \varphi_i y) < \delta_{m+1}$ mit

$$1/2 > \delta_{m+1} = \delta_{m+1}(\varepsilon_{m+1}) > 0 \quad \text{stets}$$

$$d(x, y) < \varepsilon_{m+1} \quad i=1, \dots, l$$

und aus $\vartheta(x, y) < \gamma_{m+1}$ mit $\gamma_{m+1} = \gamma_{m+1}(\sigma_{m+1}) > 0$ stets

$$\vartheta(\varphi_1 x, \varphi_1 y) < \sigma_{m+1} \quad (1=1, \dots, l)$$

$$\varepsilon_m = \min(\varepsilon_{m+1}, \gamma_{m+1});$$

.....

$$\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \gamma_1).$$

Für die ε_j gilt also:

$$0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq \dots \leq \varepsilon_m \leq \varepsilon_{m+1} = 1/4\tau.$$

9.2

Gegeben sei ein Simplex $\varphi^r \in K$ ($r \geq 1$) und eine Abbildung

$$g_r: \bar{\varphi}^r \longrightarrow \mathcal{N} \text{ und dafür gelte } d(g_r(\bar{\varphi}^r)) < 1/4\tau.$$

Eine zweite Abbildung $r_{r-1}: \dot{\varphi}^r \longrightarrow \mathcal{N}$ erfülle auf $\dot{\varphi}^r$ die Bedingung

$$(a_{r-1}) \quad \vartheta(r_{r-1}, g_r) < \varepsilon_{r-1}.$$

Dann ist $d(g_r(\bar{\varphi}^r) \cup r_{r-1}(\dot{\varphi}^r)) < \tau$, also $g_r(\bar{\varphi}^r) \cup r_{r-1}(\dot{\varphi}^r)$ ganz in einem V_i enthalten. ($\cup$ ist die mengentheoretische Vereinigung.)

O sei die Mitte, S^{n-1} die Randspäre von K^n .

Durch

$$(9.2.1) \quad \overrightarrow{\varphi_1 r_{r-1}(q), \varphi_1 g_r(q)} = \overrightarrow{0, n'_{r-1}(q)} \quad q \in \dot{\varphi}^r$$

$$(9.2.2) \quad \frac{\overrightarrow{0, n'_{r-1}(q)}}{|\overrightarrow{0, n'_{r-1}(q)}|} = \overrightarrow{0, n_{r-1}(q)} \quad q \in \dot{\varphi}^r - K(r_{r-1}, g_r)$$

definieren wir Abbildungen

$$n'_{r-1}: \dot{\varphi}^r \longrightarrow K^n$$

$$n_{r-1}: \dot{\varphi}^r - K(r_{r-1}, g_r) \longrightarrow S^{n-1}$$

9.2

SATZ 1: für $\dot{\mathcal{C}}^r$, ε_r und i_{r-1} seien die in 9.2 formulierten Voraussetzungen gültig. Ist $i_{r-1}(q) \neq \varepsilon_r(q)$ für $q \in \dot{\mathcal{C}}^r$ und $n_{r-1}(\dot{\mathcal{C}}^r)$ nullhomotop in S^{n-1} , so existiert eine koinzidenzpunktfreie Fortsetzung i_r von i_{r-1} auf $\bar{\mathcal{C}}^r$, für die (a_r) gilt.

Beweis: Da $n_{r-1}(\dot{\mathcal{C}}^r)$ nullhomotop ist in S^{n-1} , läßt sich n_{r-1} über $\bar{\mathcal{C}}^r$ zu einer Abbildung n_r fortsetzen.

Für alle $q \in \dot{\mathcal{C}}^r$ ist $0 < |\bar{0}, n'_{r-1}(q)| < \hat{\sigma}_r$ wegen (a_{r-1}) und $i_{r-1}(q) \neq \varepsilon_r(q)$.

Die reelle Funktion $l(q) = |\bar{0}, n'_{r-1}(q)|$ setzen wir, was offenbar möglich ist, so über $\bar{\mathcal{C}}^r$ fort, daß diese Schranken auf ganz $\bar{\mathcal{C}}^r$ gelten.

Die durch

$$(9.2.1) \quad \bar{l}(q) \cdot \bar{0}, n'_r(\bar{q}) = \bar{0}, n'_r(\bar{q}) = \bar{\varphi}_1 i_r(\bar{q}), \quad \bar{\varphi}_1 \varepsilon_r(\bar{q}) \quad q \in \bar{\mathcal{C}}^r$$

definierte Abbildung $i_r: \bar{\mathcal{C}}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat die gewünschten Eigenschaften: wegen $l(q) < \hat{\sigma}_r < 1/2$ liegen die Bildpunkte in $\mathbb{R}_1^*$ und nach (9.1.2) ist $\mathcal{Q}(i_r, \varepsilon_r) < \varepsilon_r$ auf $\bar{\mathcal{C}}^r$; wegen $l(q) > 0$ ist $i_r(q) \neq \varepsilon_r(q)$ für alle $q \in \bar{\mathcal{C}}^r$.

SATZ 2: Voraussetzungen wie in HS 1.

Ist $i_{r-1}(q) \neq \varepsilon_r(q)$ für $q \in \dot{\mathcal{C}}^r$ und n_{r-1} eine wesentliche Abbildung von $\dot{\mathcal{C}}^r$ auf S^{n-1} , so existiert eine Fortsetzung i_r von i_{r-1} auf $\bar{\mathcal{C}}^r$, die in genau einem inneren Punkt von $\mathcal{C}^r$ mit ε_r übereinstimmt und für die (a_r) gilt.

Beweis: Es sei $q_1 \in \dot{\mathcal{C}}^r$, q_0 ein innerer Punkt von $\mathcal{C}^r$ und q_α der Punkt auf der Verbindungsstrecke $q_0 \bar{q}_1$ mit dem Abstandsverhältnis $\alpha = |q_0 q_\alpha| : |q_0 q_1|$.

Die durch

$$\bar{l} \cdot \bar{0}, n'_r(\bar{q}_1) = \bar{0}, n'_r(\bar{q}) = \bar{\varphi}_1 i_r(\bar{q}), \quad \bar{\varphi}_1 \varepsilon_r(\bar{q})$$

definierte Abbildung $i_r: \bar{\mathcal{C}}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat die gewünschten Eigenschaften:

Wegen $|\overline{0, n'_{r-1}(q_1)}| > 0$ ist q_0 der einzige Koinzidenzpunkt von g_r und i_r und es gilt (a_{r-1}) , erst recht also (a_r) .

HILFSSATZ 3: Voraussetzungen wie in HS 1.

Ist $i_{r-1}(a) = g_r(a)$ für die Punkte a einer Menge $A \subset \mathcal{C}^r$, so existiert eine Fortsetzung von i_{r-1} auf $\overline{\mathcal{C}}^r$, die genau auf den Strecken $\overline{aq_0}$ mit g_r übereinstimmt, wobei q_0 ein beliebiger innerer Punkt von $\mathcal{C}^r$ ist. Für diese Fortsetzung gilt (a_r) .

Beweis: Man setze i_{r-1} wie in HS 2 auf $\overline{\mathcal{C}}^r$ fort.

9.4

SATZ 1: f und g seien stetige Abbildungen von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$.

Die Unterteilung M von $\mathcal{M}$ sei so fein, daß für alle Simplexe $\mathcal{C} \in M$ gilt:

$$(9.4.1) \quad d(g(\overline{\mathcal{C}})) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad d(f(\overline{\mathcal{C}})) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Dann gibt es eine zu f homotope Abbildung f' , für die $K(f', \varepsilon)$ aus gewissen Simplexen der ersten baryzentrischen Unterteilung M_1 von M mit Dimensionen $\leq d$ besteht ($d = m - n$).

Beweis: W sei die Menge der Simplexe von M , deren Hülle einen Koinzidenzpunkt enthält, $\mathcal{C} \in W$, $x \in \overline{\mathcal{C}}$ ein Koinzidenzpunkt, $y \in \overline{\mathcal{C}}$ beliebig. Dann erhalten wir mit (9.4.1)

$$\rho(f(y), g(y)) \leq \rho(f(y), f(x)) + \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(x), g(y)) < \varepsilon_0.$$

Also ist auf W $\rho(f, g) < \varepsilon_0$.

Wir definieren zunächst induktiv eine neue Abbildung $f': \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ nach folgender Vorschrift:

Sei $g_r = g|_{M^r}$, $i_r = f|_{M^r}$, $r = 0, \dots, m$ ($M^r = r$ -Gerüst von M).

Auf den Ecken von W wählen wir i'_0 so, daß $0 < \rho(i'_0, i_0) < \varepsilon_0$ gilt. Auf den Ecken von $M - W$ sei $i'_0 = i_0$. Damit ist i'_0 auf M erklärt.

Wir nehmen an, eine Abbildung f'_{r-1} sei auf M^{r-1} erklärt und es beste (a_{r-1}) für die Abbildungen f'_{r-1} und g_{r-1} ($r \geq 1$). Auf jedes der Simplexe aus M^r ist dann genau einer der Hilfs-sätze 1 - 3 anwendbar und deren Anwendung liefert eine Fortsetzung f'_r von f'_{r-1} auf M^r . Als q_0 wählen wir in HS 2 und HS 3 jeweils die baryzentrische Mitte des betrachteten Simplexes. Auf den Simplexen von $M^r - M^r$ setzen wir $f'_r = f'_r$. Damit ist f'_r auf M^r erklärt und dort gilt (a_r) .

$\alpha > 0$ sei die nur von M abhängige Zahl mit der Eigenschaft, daß zwei Abbildungen f_0 und f_1 eines beliebigen topologischen Raumes N in M homotop sind, falls $\beta(f_0, f_1) < \alpha$ ist. Die oben definierte Abbildung $f': M \rightarrow M$ hat alle im Satz verlangten Eigenschaften, wenn wir $\tau < 2\alpha$ wählen (vgl. 9.1.2)

f' ist zu f homotop, denn nach Konstruktion von f' ist

$$\beta(f', g) < \frac{1}{4}\tau, \text{ also } \beta(f', f) < \frac{1}{2}\tau < \alpha.$$

Wegen der in HS 2 und HS 3 verwendeten Fortsetzung und der Wahl von q_0 bilden die Punkte von $K(f', g)$ Simplexe von M_1 aus. Diese lassen sich dadurch charakterisieren, daß ihre in der natürlichen Ordnung der Ecken von M_1 erste Ecke einer der bei Anwendung von HS 2 entstandenen Koinzidenzpunkte ist.

$\pi_r(S^{n-1})$, die r -te Homotopiegruppe von S^{n-1} , ist für $r < n-1$ trivial. Die Voraussetzung von HS 1, $M_{r-1}(\dot{C}^r)$ sei nullhomotop in S^{n-1} , ist also für $r \leq n-1$ stets erfüllt. Koinzidenzpunkte aus HS 2 können demnach nur in Simplexen aus M auftreten, deren Dimension $\geq n$ ist.

Für $m < n$ gibt es in M keine n -Simplexe, also sind f' und g koinzidenzfrei.

Für $m \geq n$ ergeben sich Koinzidenzsimplexe aus M_1 , deren Dimension höchstens $m - n = d$ ist.

Von nun an setzen wir $m \geq n$ voraus.

Die Menge der Simplexe, deren Träger $K(r', g)$ ist, nennen wir $\mathcal{K}(r', g)$.

Koinzidenzgebilde $K(r', g)$ mit den in Satz 1 angegebenen Eigenschaften und deren zugehörige Simplexmengen $\mathcal{K}(r', g)$ nennen wir - als ausgezeichnete Elemente der Menge der Koinzidenzgebilde der Abbildungspaare aus der Abbildungsklasse (F, g) - Normalformen.

10. Beziehung der Normalformen zur Koinzidenzklasse

10.1

Jeder Normalform $\mathcal{K}(f, g)$ ist auf natürliche Weise eine Reihe von Ketten mit Dimensionen $n + v$ ($v = 0, \dots, d$) zugeordnet.

Die Abbildung h_{n+v-1} ist auf dem Rand aller Simplexe $\mathcal{K}_i^{n+v}$ ($i = 1, \dots, s$) definiert, in die bei der Bildung der Normalform nach HS 1 oder HS 2 fortgesetzt wurde. (Diese Simplexe enthalten entweder keinen, oder genau einen Koinzidenzpunkt, der dann erste Ecke eines Koinzidenzsimplexes ist.)

Das durch $h_{n+v-1}(\partial \mathcal{K}_i^{n+v})$ bestimmte Element von $\pi_{n+v-1}(S^{n-1})$ sei $\gamma(\partial \mathcal{K}_i^{n+v})$. Für $v = 0$ ist $\gamma(\partial \mathcal{K}_i^n)$ der gewöhnliche Grad der Abbildung $h_{n-1} : \partial \mathcal{K}_i^n \rightarrow S^{n-1}$.

Wir definieren:

$$(10.1.1) \quad z^{n+v} = \sum_{i=1}^{s_v} \gamma(\partial \mathcal{K}_i^{n+v}) \mathcal{K}_i^{n+v} \quad v = 0, \dots, d$$

HILFSSATZ 4: Es sei $z^{n+v_0} \neq 0$, aber $z^{n+v} = 0$ für $v < v_0$.

Dann ist z^{n+v_0} ein Kozyklus.

Beweis: Ein Simplex $\mathcal{K}^{n+v_0+1}$ erhält in ∂z^{n+v_0} den Koeffizienten $\sum \gamma(\partial \mathcal{K}^{n+v_0})$, wobei die Summe über die mit der induzierten Orientierung versehenen Randsimplexe $\mathcal{K}^{n+v_0}$ von $\mathcal{K}^{n+v_0+1}$ zu erstrecken ist. $\gamma(\partial \mathcal{K}^{n+v_0})$ ist für alle

$(n + v_0)$ -Simplexe erklärt wegen der Voraussetzung über V_0 .)

Dieser Koeffizient ist wegen der Additivität des Grades null:

$$\sum \gamma(\partial \varphi^{n+v_0}) = \gamma(\sum \partial \varphi^{n+v_0}) = \gamma[\partial \sum \varphi^{n+v_0}] = \gamma(\partial \partial \varphi^{n+v_0+1}) = 0.$$

Bemerkung: Als notwendige und hinreichende Voraussetzung dafür, daß z^{n+} ein Kozyklus ist, muß $\gamma(\partial \varphi^{n+v})$ für alle $(n+v)$ -Simplexe definiert sein. Das ist im allgemeinen nicht der Fall, sondern nur für $v = v_0$.

10.2

SATZ 2: Der durch eine Normform $k(r, g)$ bestimmte Kozyklus z^n liegt in der Kozyklidenklasse $j^n(r, g)$. (Dabei fassen wir z^n als Kozyklus mit ganzrationalen Koeffizienten auf. Das ist möglich, weil $\prod_{n-1}(S^{n-1})$ für $n > 1$ zur Gruppe der ganzen Zahlen isomorph ist und für $n = 1$ nur aus 0 und 1 besteht.)

Beweis: Wir suchen zunächst $\gamma(\partial \varphi^n)$ unmittelbar durch die Abbildungen i und g auszudrücken.

$\gamma(\partial \varphi^n)$ ist definiert als Grad der Abbildung

$$\alpha_{n-1} : \partial \varphi^n \longrightarrow S^{n-1} \quad (\text{vgl. (9.2.2)})$$

Nach Definition des lokalen Grades ([1] S. 487) können wir dafür auch sagen:

$\gamma(\partial \varphi^n)$ ist der lokale Grad der Abbildung

$$\alpha_n' : \varphi^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ im Punkt } 0 \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{vgl. (9.2.1)}).$$

V_i sei ein beliebiges Element der in (9.1.1) definierten Überdeckung von $\mathcal{M}$. Wir definieren eine Abbildung

$$\psi_i : \overline{V_i} \times V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

durch die Vorschrift

$$0, \psi_i(a, b) = \overrightarrow{\varphi_i(a)}, \varphi_i(b)$$

und eine Abbildung

$$\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$$

durch die Vorschrift

$$\sigma(p) = f(p) \times g(p) \quad p \in \mathcal{M}.$$

Wenn die Unterteilung M von $\mathcal{M}$ fein genug ist (vgl. Satz 1), so ist auf jedem Simplex $\overline{\mathcal{C}}^r$, das einen Koinzidenzpunkt enthält, die Abbildung h'_r definiert und es gilt

$$h'_r = \psi_i \sigma|_{\overline{\mathcal{C}}^r}.$$

Nach [1], S. 494, ist für zwei in $\overline{V_1}$ liegende (rationale) Ketten c_r und d_{n-r} , die sich in relativ allgemeiner Lage zueinander befinden, der lokale Grad $j(c_r, d_{n-r})$ von $\psi_i(c_r \times d_{n-r})$ in 0 erklärt und ist bis auf das Vorzeichen $(-1)^r$ gleich der Schnittzahl der beiden Ketten in $\mathcal{M}$. (Für die Erklärung des lokalen Grades und der Schnittzahl ist natürlich die gleiche Orientierung von $\mathcal{M}$ zu nehmen.)

$$(10.2.1) \quad j(c_r, d_{n-r}) = (-1)^r (c_r \cdot d_{n-r}).$$

$\mathcal{C}^n$ sei ein Simplex, das in der Normalform $K(1, \dots)$ einen Koinzidenzpunkt enthält. Wie in (10.2.1) setzen wir

$$\sigma \mathcal{C}^n = \sum_{r=0}^n \sum_{i,j} [\mathcal{C}_i^r \cup \mathcal{C}_j^{n-r} \circ \epsilon^n] \cdot [\mathcal{C}_i^r \times \mathcal{C}_j^{n-r}].$$

Sei e^n genau einen Koinzidenzpunkt enthalten, befinden sich f_1^r und η_j^{n-r} in relativ allgemeiner Lage zueinander und liegen beide in einem gewissen $\bar{V}_K$. Wir können also (10.2.1) auf f_1^r und η_j^{n-r} anwenden.

$$\gamma(\partial e^n) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \sum_{i,j} [(e_1^r \cup e_j^{n-r}) \circ e^n] (f_1^r \cdot \eta_j^{n-r}).$$

Das gilt auch für Simplexe e^n , die keinen Koinzidenzpunkt enthalten. Für diese ist $\gamma(\partial e^n) = 0$ nach der Konstruktionsvorschrift für die Normalform und $f_1^r \cdot \eta_j^{n-r} = 0$, wenn e_1^r und e_j^{n-r} Seiten des koinzidenzfreien Simplexes e^n sind. Nur solche Paare e_1^r, e_j^{n-r} tragen aber zur Summe bei wegen des Koeffizienten $[(e_1^r \cup e_j^{n-r}) \circ e^n]$.

Wir kommen zu dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} (10.2.2) \quad z^n &= z^n(r, g) = \sum_K \gamma(\partial e_K^n) e_K^n = \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{i,j,K} (-1)^r [(e_1^r \cup e_j^{n-r}) \circ e_K^n] [f_1^r \cdot \eta_j^{n-r}] e_K^n \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{i,j} (-1)^r (f_1^r \cdot \eta_j^{n-r}) (e_1^r \cup e_j^{n-r}) \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{i,j} (-1)^r \sum_{k,\ell} f_{ik}^r \eta_{j\ell}^{n-r} (\eta_k^r \cdot \eta_\ell^{n-r}) (e_1^r \cup e_j^{n-r}) \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{k,\ell} (-1)^r (\eta_k^r \cdot \eta_\ell^{n-r}) (f_1^r \cup \eta_j^{n-r}) \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{k,\ell} (-1)^r [(\tilde{\eta}_k^{n-r} \cup \tilde{\eta}_\ell^r) \circ \tilde{\eta}_n] (f_1^r \cup \eta_j^{n-r}). \end{aligned}$$

Der Übergang zur Kohomologiekategorie von z^n geschieht wie in 4.2 und führt auf $j^n(r, g)$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Ein Vergleich mit der Hopfischen Definition des Koinzidenzkozyklus zeigt, daß die für Normalformen mögliche Erklärung einer algebraischen Anzahl von Koinzidenzpunkten auf einem n -Simplex - eben $\gamma(\partial e^n)$ - bei der Übertragung auf einen Zyklus $\{n\}$ genau die Zahl $n(\{n\})$ liefert.

10.3

Jede Normalform bestimmt über den Kozyklus z^n eine Kohomologiekategorie. Alle zu einem beliebigen Repräsentanten $[1, \zeta]$ aus der Abbildungskategorie $(1, \zeta)$ hinreichend benachbarten Normalformen - d.h. $K(f', g)$ mit $\int (f', f) < \alpha$ - bestimmen dieselbe Kohomologiekategorie.

Wir können also zusammenfassend sagen:

Einer Abbildungskategorie $(1, \zeta)$ ist die durch eine beliebige Normalform $K(f_1, g_1)$ mit $[f_1, g_1] \in (1, \zeta)$ bestimmte Kohomologiekategorie als Invariante zugeordnet.

III. Homologietheorie der Koinzidenzen

11. Im folgenden setzen wir voraus, daß der Urbildraum eine m -dimensionale orientierte h -Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist. f und g sind wie bisher stetige Abbildungen von $\mathcal{M}$ in die n -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$.

11.1

Durch Dualisierung der Ergebnisse des Teiles II erhalten wir die folgenden, nur für Mannigfaltigkeiten gültigen Aussagen: (Die Abschnitte 4 und 5 entsprechen genau der Definition der Koinzidenzklasse in Franz [4].)

Dem Graphen von f ist die m -dimensionale Homologiekategorie

$$\begin{aligned} (4.1.1)^* \quad (f)_m &= \sum_{r \in \mathbb{N}} (-1)^{r(m-r)} f_r \tilde{y}_{n-r}^1 \times y_r^1 \\ &= \sum_{r \in \mathbb{N}} (-1)^{r(m-r)} \tilde{x}_{m-r}^k \times f_r x_r^k \end{aligned}$$

von $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ invariant zugeordnet. (Die Umformung erfolgte nach (2.5.4) und (1.3.5).)

Der Schnitt der Klassen $(f)_m$ und $(g)_m$ liefert eine invariante Homologiekategorie von $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$:

$$(5.1.1)^* \quad (f)_m \wedge (g)_m = \sum_{r, \beta, i, k} (-1)^{r(m-r) + \beta(m-\beta) + r(n-\beta)} \left[(\tilde{x}_{m-r}^i \wedge \tilde{x}_{m-\beta}^k) \times (f_r x_r^i \wedge g_\beta x_\beta^k) \right]$$

$$(5.1.2)^* = \sum_{r, \beta, i, \lambda} (-1)^{\beta(n-r) + r + \beta + d(r+\beta)} \text{Sp}(\tilde{D}_\lambda(n-r, n-\beta) G_\beta^T C_\mu^T(r, \beta) F_r) (\tilde{x}_{m-r-\beta}^i \times y_{r+\beta-\beta}^\lambda)$$

Setzt man $r + \beta = n + v$ und spaltet auf nach den Werten von v , so ergeben sich die Klassen

$$(5.1.3)^* \quad (f, g)_v = \sum_{r, \beta, i, k} (-1)^{v(m+\lambda) + nd + r(v+\lambda)} (\tilde{x}_{m-r}^i \wedge \tilde{x}_{r+d-v}^k) \times (f_r x_r^i \wedge g_{n-v-r} x_{n-v-r}^k) \\ = \sum_{r, \beta, i, \lambda} (-1)^{r(v+\lambda) + v(m+\lambda) + nd} \text{Sp}(\tilde{D}_\lambda(n-r, r-v) G_{n-r-v}^T C_\mu^T(r, n-v+v) F_r) (\tilde{x}_{d-v}^i \times y_v^\lambda)$$

Projektion von $(f, g)_0$ nach $\mathcal{M}$ führt auf die d-dimensionale Koinzidenzklasse

$$(5.1.4)^* \quad j_d(f, g) = (-1)^{nd} \sum_{r, i, k} (-1)^r (\tilde{x}_{m-r}^i \wedge \tilde{x}_{r+d}^k) \left[(f_r x_r^i \wedge g_{n-r} x_{n-r}^k) \cdot y_0 \right] \\ = (-1)^{nd} \sum_{r, \mu} (-1)^r \text{Sp}(\tilde{D}(n-r, r) G_{n-r}^T C_\mu^T(r, n-r) F_r) \tilde{x}_d^\mu$$

Die $(f, g)_v$ hängen mit $j_d(f, g)$ durch die Beziehung

$$(6.1.1)^* \quad (f, g)_v = (-1)^{vn} j_d(f, g) \sum_{\ell} g_\ell^\dagger y_{n-v}^1 \times \tilde{y}_v^1$$

zusammen. Aus $j_d(f, g) = 0$ folgt $(f, g)_v = 0$ für $v = 0, \dots, d$.

11.2

Die simpliziale Ausgangsteilung von M sei M_1 , deren baryzentrische Unterteilung M_2 und die zu M duale Sternteilung M^* .

Eine Normalkategorie $K(f, g)$ besteht aus denjenigen Simplex von M_1 , deren Ecke niedrigster Ordnung ein durch Anwendung von hS entstandener Koinzidenzpunkt ist. Die Simplexe aus M_1 , deren erste Ecke Mitte eines $(n+v)$ -Simplexes $\mathcal{M}_1^{n+v}$ von M ist,

bilden die zu φ_1^{n+v} duale Zelle $\tilde{\varphi}_1^{d-v}$.

Also besteht eine Normalform aus Zellen der Teilung K^* mit Dimensionen $\leq d$.

Analog zu (10.1.1) bilden wir Ketten

$$(10.1.1)^* \quad z_{d-v} = \sum_{i=0}^{s_v} \gamma(\partial \varphi_1^{n+v}) \tilde{\varphi}_1^{i \quad d-v}$$

z_{d-v} ist die zu z^{n+v} duale Kette.

HILFSSATZ 4*: z_{d-v_0} ist ein Zyklus. (in K^{n+v_0} sind bei der schrittweisen Definition von r' zum ersten Mal Koinzidenzpunkte aufgetreten, K^{n+v_0-1} ist koinzidenzfrei.)

SATZ 2*: $j_d(r, g)$ ist die Homologiekategorie des Zyklus z_d .

11.3

Der Fall $g = \text{const.}$ führt auf

$$8.1^* \quad j_d(r, \text{const.}) = (-1)^{n_f} \tilde{\gamma}_0,$$

und es ist analog zu 8.2

$$8.2^* \quad j_d(f, i) = (-1)^n \chi(N) j_d(r, \text{const.}).$$

$j_d(r, \text{const.})$ ist genau dann von Null verschieden, wenn r in der Dimension n einen nicht verschwindenden Homologiemorphismus induziert. Für $\chi(N) \neq 0$ ist auch auch $j_d(r, r) \neq 0$. Für ungerades n ist $\chi(N) = 0$, also auch $j_d(r, r) = 0$, unabhängig von r .

11.4

aufgrund von Satz 2* können wir über die Bedeutung der Invarianten $j_d(f, g)$ folgendes sagen:

Wenn $j_d(f, g) \neq 0$ ist, treten in j e d e r Normalform aus der Klasse (f, g) - d.h. $K(r_1, g_1)$ mit $[r_1, g_1] \in (f, g)$ - d -dimensionale Simplexe auf. Jede Normalform einer Klasse mit nicht verschwindender Invarianten $j_d(f, g)$ ist genau d -dimensional.

(Eine entsprechende Dimensionsaussage läßt sich aus dem Nichtverschwinden von $j^n(f, g)$ im Fall eines beliebigen Urbildpolyeders nicht herleiten, wie man an einfachsten Beispielen sieht.)

Im nächsten Abschnitt wird die hier anknüpfende Frage behandelt, ob bei nichtverschwindender Invarianten $j_d(f, g)$ jedes Koinzidenzgebilde aus der Klasse (f, g) mindestens d -dimensional ist.

11.5

Für $n \leq 2$ verschwinden alle z_{d-v} mit $v = 1, \dots, d$, denn die höheren Homotopiegruppen der entsprechenden Sphären, die als Koeffizientengruppen von z_{d-v} auftreten, sind null.

In anschaulich faßbaren Fällen tritt also nur z_d allein auf.

Daß trotz $j_d(f, g) = 0$ die Dimension aller Koinzidenzgebilde aus der Klasse (f, g) d sein kann, sieht man etwa an dem Beispiel:

f = Hopfsche wesentliche Abbildung von S^3 auf S^2 ,

g = konstante Abbildung. Hier ist $j_1(f, g)$ trivialerweise null wegen $H_1(S^3) = 0$.

Schließlich soll an einem Beispiel gezeigt werden, daß die z_{d-v} nicht in der Weise voneinander abhängen wie die $(f,g)_v$, daß also aus $z_d = 0$ nicht folgt $z_{d-v} = 0$ für $v > 0$.

Es sei $\mathcal{M} = S^4$, $\mathcal{N} = S^3$. Zur Definition der Abbildungen zerlegen wir die beiden Sphären in je einen Äquator S^3_0 und S^2_0 und die zugehörigen Breitensphären S^3_t ($-1 < t < 1$) und S^2_t ($-1 < t < 1$). Die dabei nicht erfaßten Pole von $\mathcal{M}$ seien A und B, die von $\mathcal{N}$ A' und B'.

Nun legen wir fest: $g(S^4) = A'$, $r(S^3_t) = S^2_t$, und zwar sei r über S^3_t die Hopfische Abbildung (sie definiert die wesentliche Klasse von $\Pi_3(S^2)$), $r(A) = A'$, $r(B) = B'$.

A ist der einzige Koinzidenzpunkt und nat als Koeffizienten die wesentliche Klasse von $\Pi_3(S^2)$. A ist wesentlich, denn die Abbildung r definiert die wesentliche Klasse von $\Pi_4(S^3)$ ([11], S. 112). r ist die Freudenthalsche Einnägung der Hopfischen Abbildung.

12. Dimensionssatz

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist der Beweis des Satzes: Ist $j_d(f,g) \neq 0$, so ist auch die d-dimensionale Čechsche Homologiegruppe jedes Koinzidenzgebildes aus der Klasse (f,g) nicht null.

Dabei nützen wir ein Ergebnis von Kaplan [8] aus, nach dem die Čechschen Homologiegruppen einer kompakten Teilmenge A eines Polyeders P isomorph sind zu den mit Hilfe sogenannter schwebender Zyklen von A berechneten Homologiegruppen von A. (Der Name „schwebende Zyklen“ stammt von Alexandroff ([2], S. 191), der gleichzeitig mit Kaplan den erwähnten Satz bewiesen hat.)

Wir konstruieren mit Hilfe einer Reihe von Normalformen aus (f, g) einen schwebenden d -Zyklus von $K(f, g)$, der für $j_d(f, g) \neq 0$ nicht berandet.

Dabei geht es nur darum, einen nicht berandenden Zyklus zu finden, nicht um die Berechnung der d -dimensionalen Homologiegruppe von $K(f, g)$, die keine Invariante der Klasse (f, g) ist.

12.1

DEFINITION 1 ([8] S. 260): A sei eine beliebige Teilmenge des Polyeders P . Mit G seien in P offene Mengen bezeichnet, die A umfassen. In jeder dieser Umgebungen G von A wählen wir einen singulären k -Zyklus $z_k(G)$.

Eine Menge von Zyklen $C_k = \{z_k(G)\}$ - wobei G alle Umgebungen von A durchläuft - ist ein schwebender k -Zyklus von A , wenn für jede Umgebung $G_2 \subset G_1$ $z_k(G_2)$ zu $z_k(G_1)$ in G_1 homolog ist. C_k berandet in A , wenn $z_k(G)$ in G homolog null ist für alle G .

Wir betrachten das Koinzidenzgebilde $K(f, g)$ eines festen Paares von Abbildungen f, g einer h -Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Als abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{M}$ ist $K(f, g)$ ein Kompaktum. Wir zeigen, dass jeder zu (f, g) gehörenden Normalform auf natürliche Weise ein schwebender Zyklus von $K(f, g)$ zugeordnet ist.

12.2

M_0 sei eine den Voraussetzungen von Satz 1 genügende simpliziale Unterteilung von $\mathcal{M}$. In M_0 bilden wir, von dem festen Abbildungspaar (f, g) ausgehend, eine Normalform $K_1(f, g)$.

(Der Index 1 soll andeuten, daß $K_1(f, g)$ aus Simplexen der ersten baryzentrischen Unterteilung M_1 von M besteht.)

Diese bestimmt den Zyklus z_d^1 , einen Repräsentanten von $j_d(f, g)$. Wir nehmen an, daß z_d^1 nicht null ist.

In der 1-ten baryzentrischen Unterteilung M_1 von M_0 sei bereits eine gewisse Normalform $K_{i+1}(f, g)$ gebildet. Damit ist auf allen $(n-1)$ -Simplexen von M_i die Abbildung n erklärt. Bei der Normalformbildung in M_{i+1} definieren wir n für die auf den abgeschlossenen $(n-1)$ -Simplexen von M_i liegenden Simplexe genau wie bei der Konstruktion von $K_{i+1}(f, g)$, auf den übrigen Simplexen innerhalb der Konstruktionsvorschrift beliebig.

Dadurch erhalten wir eine von $K_{i+1}(f, g)$ abhängige Normalform $K_{i+2}(f, g)$.

Die Feinheit der Unterteilung M_i sei ε_i . $\varepsilon_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$. $K_{i+1}(f, g)$ - und damit der zugehörige Zyklus z_d^{i+1} - liegt in einer ε_i -Umgebung G_i von $K(f, g)$, wie unmittelbar aus der Konstruktionsvorschrift für die Normalform hervorgeht: $K(f, g)$ liegt in W_i , der Menge aller Simplexe von M_i , deren Hülle einen Koinzidenzpunkt enthält.

Die Zyklen $z_d^{i+1}(G_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, sind - als Repräsentanten der Invarianten j_d - untereinander homolog in $\mathcal{M}$. Um zu zeigen, daß $C_d = \{z_d^{i+1}(G_i)\}$ ein schwebender d -Zyklus von $K(f, g)$ ist, genügt es offenbar, nachzuweisen, daß $z_d^{i+1} \sim z_d^{i+2}$ in G_i , (nicht nur in $\mathcal{M}$).

Wir konstruieren eine $(d+1)$ -Kette, deren Rand diese Homologie vermittelt.

12.3

DEFINITION 2: (Alexandrov I, S. 135 und II, S. 43 f)

K sei ein endlicher Simplicialkomplex. Die Ecken von K seien fest nummeriert: $a_1, \dots, a_s$. Den a_i ordnen wir neue Ecken $b_1, \dots, b_s$ eineindeutig zu und definieren das **Prisma** K_{01} über K als Menge aller Simplexe

$$(a_{i_0}, \dots, a_{i_k}, b_{i_k}, \dots, b_{i_0})$$

mit $i_0 < \dots < i_k$ und $(a_{i_0}, \dots, a_{i_k}) \in K$.

Weiter definieren wir, mit $+(c_0, \dots, c_r)$ die Orientierung eines Simplexes $(c_0, \dots, c_r)$ durch die angegebene Eckenreihenfolge andeutend:

(12.3.1) $t_{1n}^r = +(b_{n_0}, \dots, b_{n_r})$ ist die Projektion von

$t_{0n}^r = +(a_{n_0}, \dots, a_{n_r})$ auf das Dach von K_{01} ,

(12.3.2) $u_1^r = \sum c_n t_{1n}^r$ ist die Projektion der Kette

$u_0^r = \sum c_n t_{0n}^r$ auf das Dach von K_{01} .

(12.3.3) $\prod_i t_{0n}^r = +(b_{n_0}, \dots, b_{n_i}, a_{n_i}, \dots, a_{n_r})$

(12.3.4) $\prod t_{0n}^r = \sum_{i=0}^r (-1)^i \prod_i t_{0n}^r$

(12.3.5) $\prod u_0^r = \sum c_n \prod t_{0n}^r \in L^{r+1}(K_{01})$ ist das Prisma

über der Kette $u_0^r \in L^r(K)$.

Ohne Beweis übernehmen wir aus Alexandroff [2] II, S. 43

die Beziehung

(12.3.6) $\partial \prod u_0^r = u_0^r - u_1^r - \dots$

DEFINITION 3: $a^d = (a_0, \dots, a_d)$ und $b^d = (b_n, \dots, b_m)$ seien zwei Simplexe aus M_{i+2} . (Die Indizes bei den Ecken geben deren Ordnung an.)

Wir sagen, a^d und b^d seien verbindbar, wenn in M_{i+2} die $(d+1)$ -Simplexe (= Verbindungssimplexe)

$$(a, b)_\alpha = (a_0, \dots, a_\alpha, b_{n+\alpha}, \dots, b_m) \quad \alpha = 0, \dots, d$$

existieren, oder - was damit gleichwertig ist - wenn die Simplexe $(a_\alpha, b_{n+\alpha})$ existieren.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz dieser Simplexe ist, daß alle Ecken a_k und b_k in dem m -Simplex von M_{i+1} mit der Mitte b_m liegen.

12.4.

Die Simplexe von z_d^{i+1} werden beim Übergang zu M_{i+2} unterteilt. Den dadurch entstehenden Zyklus nennen wir z_d^{i+2} . Die Ecken der zu z_d^{i+2} gehörenden Simplexe haben in M_{i+2} die Ordnungen $0, \dots, d$, die Ecken der zu z_d^{i+2} gehörenden Simplexe haben die Ordnungen $n, \dots, m$.

Unser Ziel ist, das Prisma über z_d^{i+2} durch eine Kette aus Verbindungssimplexen zwischen Simplexen von z_d^{i+2} und z_d^{i+2} in M_{i+2} zu realisieren und nachzuweisen, daß das Dach des so realisierten Prismas z_d^{i+2} ist. Nach (12.3.6) ist dann z_d^{i+2} homolog zu z_d^{i+2} und zwar in G_1 , weil die Verbindungssimplexe in G_1 liegen.

Wir geben zunächst an, welche Simplexe aus den beiden Zyklen verbunden werden sollen.

$+(0, \dots, m)$ sei ein Simplex aus M_1 .

$x^m(j_0 \dots j_m) = \text{sign}(j_0, \dots, j_m) (|j_0|, \dots, |j_0 \dots j_m|)$
sind die Teilsimplexe von M_1 in M_{i+1} mit der induzierten Orientierung. Dabei ist $(j_0, \dots, j_m)$ eine beliebige Permutation von $(0, \dots, m)$ und $|j_0 \dots j_r|$ die Mitte des Simplexes $(j_0, \dots, j_r)$.

$x^d(j_n \dots j_m) = (|j_0 \dots j_n|, \dots, |j_0 \dots j_m|)$ ist diejenige d-Seite von $x^m(j_0 \dots j_m)$, die in $K_{i+1}(f', g)$ liegen kann.

$x^n(j_{r_0} \dots j_{r_n}) = (|j_0 \dots j_{r_0}|, \dots, |j_0 \dots j_{r_n}|)$, $r_0 < r_1 < \dots < r_n$, sind die n-Seiten von $x^m(j_0 \dots j_m)$.

Die Menge der in W_i liegenden $x^d(j_n \dots j_m) \in M_{i+1}$ und ihrer Seiten nennen wir $K'_{i+1}(f', g)$, die Menge der daraus durch Unterteilung entstehenden Simplexe aus M_{i+2} nennen wir $K'_{i+2}(f', g)$.

Um eine einfache Schreibweise für die Simplexe aus M_{i+2} zu erhalten, definieren wir:

$$+(|j_0 \dots j_{r_0}|, \dots, |j_0 \dots j_{r_n}|) = +(i_{r_0}, \dots, i_{r_n})$$

$$r_0 < r_1 < \dots < r_n, r_\alpha \in 0, \dots, m.$$

Der Index jeder Ecke gibt zugleich deren Ordnung in M_{i+1} an.

Die in $(i_0, \dots, i_m)$ liegenden Simplexe der zu $+(i_{r_0}, \dots, i_{r_n})$ dualen Zelle sind

$$x^d(i_{r_n} i_{s_1} \dots i_{s_d}) = \text{sign}(r_0, \dots, r_n, s_1, \dots, s_d) \cdot (|i_{r_0} \dots i_{r_n}|, |i_{r_0} \dots i_{r_n} i_{s_1}|, \dots, |i_{r_0} \dots i_{r_n} i_{s_1} \dots i_{s_d}|),$$

wobei $s_1, \dots, s_d$ eine beliebige Permutation der Zahlen aus $\{0, \dots, m\} - \{r_0, \dots, r_n\}$ ist. Die Orientierung folgt aus der Normierungsvorschrift.

Wir bestimmen $\vee$ so, daß gilt:

$$r_0 < \dots < r_{n-\vee-1} < n \leq r_{n-\vee} < \dots < r_n.$$

Die $s_\alpha \geq n$ bezeichnen wir in der Reihenfolge, in der sie in der Permutation $(r_0, \dots, r_n, s_1, \dots, s_d)$ vorkommen, mit $s_1^*, \dots, s_{d-v}^*$, die $s_\alpha < n$ mit $s_1^!, \dots, s_v^!$.

Nun geben wir eine Zuordnung der Ecken von $x^d(i_{r_n}, i_{s_d}, \dots, i_{s_d})$ zu den Ecken der Teilsimplexe von $(i_n, \dots, i_m)$ an durch:

$$(12.4.1) \quad \begin{aligned} |r_0 \dots r_n s_1 \dots s_\alpha| &\longrightarrow |r_{n-v} \dots r_{n-v+\alpha}| && \text{für } \alpha \leq v \\ |r_0 \dots r_n s_1 \dots s_\alpha| &\longrightarrow |r_{n-v} \dots r_n s_1^* \dots s_{\alpha-v}^*| && \text{für } \alpha > v \end{aligned}$$

Wegen

$$(12.4.2) \quad \{r_{n-v} \dots r_n s_1^* \dots s_{\alpha-v}^*\} \subset \{r_0 \dots r_n s_1 \dots s_\alpha\}$$

spannen zugeordnete Ecken ein Simplex in M_{i+2} auf.

Daraus folgt:

(12.4.3) Die angegebene Eckenzuordnung induziert eine simpliziale Abbildung S_{i+2} von $K_{i+2}(f', g)$ in $K'_{i+2}(f', g)$.

(12.4.4)

Zugeordnete Simplexe

$$\begin{aligned} &(|r_0 \dots r_n|, |r_0 \dots r_n s_1|, \dots, |r_0 \dots r_n s_1 \dots s_d|) \longrightarrow \\ &\longrightarrow (|r_{n-v}|, |r_{n-v} \dots r_{n-v+1}|, \dots, |r_{n-v} \dots s_{d-v}^*|) \end{aligned}$$

sind verbindbar.

Weil (12.4.2) die genaue Bedingung dafür ist, daß die beiden Ecken ein Simplex aufspannen, folgt weiter:

(12.4.5)

Für $v = 0$ ist diese Zuordnung die einzige, bei der zugeordnete Simplexe verbindbar sind. ($v = 0$ bedeutet, daß sich $(i_{r_0}, \dots, i_{r_n})$ zu $(i_n, \dots, i_m)$ in allgemeiner Lage befindet.)

Wir bilden das Prisma über z_d^{i+2} und identifizieren die zu a_j gehörende Ecke b_j mit $s_{i+2}a_j$. Dadurch erhalten wir eine Realisierung des Prismas in M_{i+2} . Das Dach des so realisierten Prismas ist ein in $K'_{i+2}(r', g)$ liegender Zyklus. Wir wollen beweisen, daß dieser Zyklus z_d^{i+2} ist.

12.5

Das Simplex $\text{sign}(r_0, \dots, r_n, s_1, \dots, s_d) \cdot x^d(i_{r_n}, \dots, i_{s_d})$ erhält in z_d^{i+2} den gleichen Koeffizienten $\gamma(i_{r_0}, \dots, i_{r_n})$ wie das Simplex $(i_{r_0}, \dots, i_{r_n})$ in dem zu z_d^{i+2} dualen Kozyklus z_{i+1}^n . Der Beitrag dieses Simplexes zum Koeffizienten des ihm durch s_{i+2} zugeordneten ist

$$\text{sign}(r_0, \dots, r_n, s_1, \dots, s_d) \cdot \text{sign}(r_{n-v}, \dots, r_n, s_1^*, \dots, s_{d-v}^*) \cdot \gamma(i_{r_0}, \dots, i_{r_n}),$$

wenn für das Bildsimplex die gleiche Orientierung gewählt wird wie für seinen Träger $(i_n, \dots, i_m)$, daher $\text{sign}(r_{n-v}, \dots, s_{d-v}^*)$.

Wir wählen eine feste Permutation $(j_0, \dots, j_m)$, also ein bestimmtes Teilsimplex $+(i_0, \dots, i_m)$ von $(0, \dots, m)$, und ein festes Teilsimplex $x^d(i_{t_0}, \dots, i_{t_d}) = (|i_{t_0}|, \dots, |i_{t_0} \dots i_{t_d}|)$ von $(i_n, \dots, i_m)$. Der aus $(i_0, \dots, i_m)$ stammende Beitrag zum Koeffizienten von $x^d(i_{t_0}, \dots, i_{t_d})$ im Dach des Prismas ist

$$\sum_{v=0}^{M_n(d,n)} \sum_{\mathcal{P}} \text{sign}(r_0, \dots, s_d) \cdot \text{sign}(t_0, \dots, t_d) \cdot \gamma(i_{r_0}, \dots, i_{r_n}),$$

wobei die innere Summe über alle Permutationen $(r_0, \dots, s_d)$ mit $r_{n-v} = t_0$, $r_{n-v+1} = t_1, \dots, s_{d-v}^* = t_d$ zu erstrecken ist. (Damit erlassen wir genau diejenigen in dem Resten $(i_0, \dots, i_m)$ liegenden d -Simplexe von M_{i+2} , deren s_{i+2} -Bild $x^d(i_{t_0}, \dots, i_{t_d})$ ist.)

Zu fest gewählten $r_0, \dots, r_n$ - wodurch auch V bestimmt ist - und fester Verteilung der $s'_1, \dots, s'_V$ in $(r_0, \dots, s_d)$ kommen in der Summe alle Permutationen der $s'_1, \dots, s'_V$ unter sich vor und zwar mit dem gleichen $\gamma(i_{r_0}, \dots, i_{r_n})$. Für $V > 1$ ist die Anzahl dieser Permutationen gerade, also

$$\sum_{P(s'_1, \dots, s'_V)} \text{sign}(r_0, \dots, s_d) \cdot \text{sign}(t_0, \dots, t_d) \cdot \gamma(i_{r_0}, \dots, i_{r_n}) = \\ = \text{sign}(t_0, \dots, t_d) \cdot \gamma(i_{r_0}, \dots, i_{r_n}) \sum_{P(s'_1, \dots, s'_V)} \text{sign}(r_0, \dots, s_d) = 0.$$

Es bleiben die beiden Fälle $V = 0$ und $V = 1$ zu untersuchen.

$$V = 0. \text{sign}(0, \dots, n-1, t_0, \dots, t_d) \cdot \text{sign}(t_0, \dots, t_d) = +1.$$

Nach (12.4.5) gibt es nur ein Simplex, das einen Beitrag liefert, und dieser ist $+\gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_0})$.

$$V = 1. \text{sign}(0, \dots, \hat{\mu}, \dots, n-1, t_0, \dots, t_{\lambda-1}, \hat{\mu}, t_{\lambda}, \dots, t_d) \cdot \\ \cdot \text{sign}(t_0, \dots, t_d) = (-1)^{n+\lambda+\mu+1}.$$

Der Beitrag aus dem fest gewählten Simplex $+(i_0, \dots, i_m)$ zum Koeffizienten von $x^d(i_t, \dots, i_t)$ ist also:

$$\gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_0}) + \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{d+1} (-1)^{n+\lambda+\mu+1} \gamma(i_0, \dots, \hat{i}_{\mu}, \dots, i_{n-1}, i_{t_0}, i_{t_1}).$$

Wir haben die Beiträge aus den kohärent orientierten

$(i_0, \dots, i_m)$ - also $\text{sign}(j_0, \dots, j_m) \cdot (i_0, \dots, i_m)$ - zu summieren und nachzuweisen, daß der so erhaltene Koeffizient gleich ist dem Koeffizienten α von $+(i_n, \dots, i_m)$ in z_d^{i+1} .

Diesen Nachweis erbringen wir durch den Beweis der folgenden beiden Behauptungen:

$$(12.5.1) \quad \sum_P \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \cdot \gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_0}) = \alpha \quad t_0 \text{ rest,} \\ P = \text{beliebige Permutation von } j_0, \dots, j_n.$$

$$(12.5.2) \quad \sum_P \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \cdot \gamma(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{n-1}, i_{t_0}, i_{t_1}) = 0,$$

t_0, t_1, k und λ fest, P = beliebige Permutation
von $(j_0, \dots, j_n)$.
($0 \leq k \leq n-1$)

Beweis von (12.5.1).

Nach der Konstruktionsvorschrift für $K_{i+2}(r', g)$ ist auf dem Rand von $(0, \dots, n)$ die Abbildung r' genau so wie für $K_{i+1}(r', g)$ erklärt. Die Summe der Koeffizienten aller mit der induzierten Orientierung versehenen Teilsimplexe von $(0, \dots, n)$ ist also α :

$$(12.5.3) \quad \sum_P \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \cdot \gamma(i_0, \dots, i_n) = \alpha.$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus der Normierung: $+(i_n, \dots, i_m)$ ist die Orientierung von $(i_n, \dots, i_m)$ in der zu $\text{sign}(j_0, \dots, j_m) \cdot (0, \dots, n)$ dualen Zelle, und die Koeffizienten der so orientierten Simplexe in z_d^{i+1} bzw. z_1^n sind definitionsgemäß gleich.

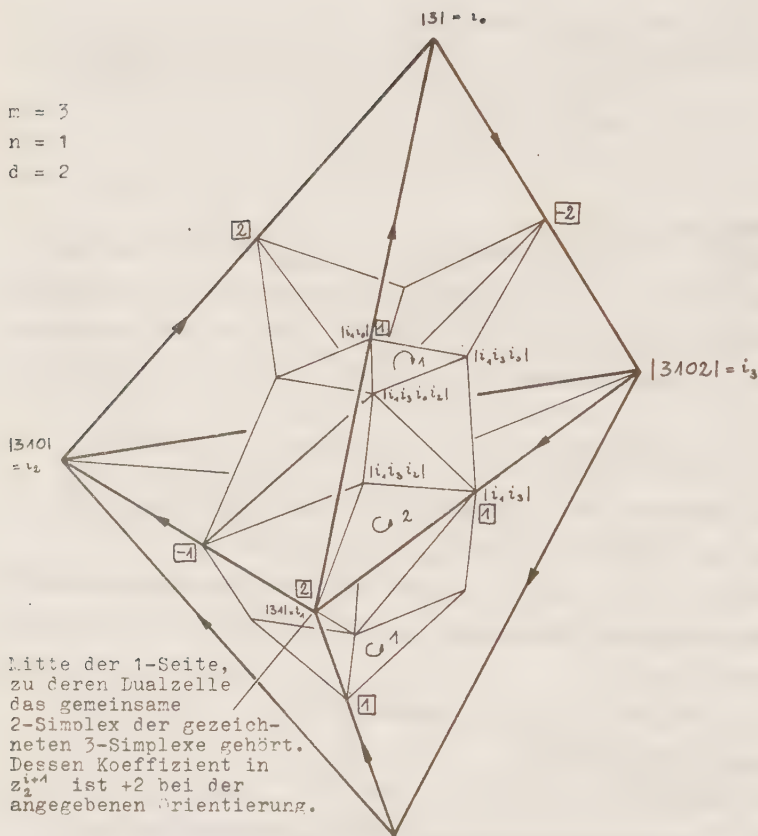
Wir betrachten ein $(n+1)$ -Simplex $x^{n+1} = (s_0, \dots, s_{n+1})$ und dessen Randsphäre S^n .

Der Rand $\dot{x}^n$ eines Simplexes x^n aus ∂x^{n+1} zerlegt S^n in zwei zu x^n homöomorphe Zellen. Die Koeffizientensumme in jeder dieser Zellen wird durch den Grad der Abbildung h auf ∂x^n bestimmt, wenn die durch eine Orientierung von S^n induzierte Orientierung genommen wird. Daraus folgt:

$$(12.5.4) \quad \sum_K (-1)^K \gamma(s_0, \dots, \hat{s}_K, \dots, s_{n+1}) = 0$$

für alle $(s_0, \dots, s_{n+1}) \in M_{i+1}$.

$m = 3$
 $n = 1$
 $d = 2$



Zuordnung nach (12.4.1):

$ i_1 i_3 i_0 i_2 $	$\longrightarrow$	$ i_1 i_3 i_2 $
$ i_1 i_3 i_0 $	$\longrightarrow$	$ i_1 i_3 $
$ i_1 i_3 i_2 $	$\longrightarrow$	$ i_1 i_3 $
$ i_1 i_3 $	$\longrightarrow$	$ i_1 $
$ i_1 i_0 $	$\longrightarrow$	$ i_1 $

Entsprechend für das untere
Simplex. Man verifiziert
sofort (12.5.1) und (12.5.2).

Die eingetragenen Zahlen geben $\gamma(\partial \mathcal{C}_1^i)$ an. Sie gehören (12.5.1).

Dabei ist mit $(s_0, \dots, \hat{s}_k, \dots, s_{n+1})$ das Randsimplex
 $(|x_0 \dots x_{s_0}|, \dots, |x_0 \dots x_{s_{k-1}}|, |x_0 \dots x_{s_{k+1}}|, \dots, |x_0 \dots x_{s_{n+1}}|)$
 von x^{n+1} bezeichnet, also

$$\partial(s_0, \dots, s_{n+1}) = \sum_k (-1)^k (s_0, \dots, \hat{s}_k, \dots, s_{n+1}).$$

Wir betrachten das $(n+1)$ -Simplex $(i_0, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{t_0})$,
 $t_0 > n$. Dafür gilt nach (12.5.4)

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \gamma(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{t_0}) + (-1)^n \gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_0}) + (-1)^{n+1} \gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_n) \right] = 0,$$

also auch

$$\sum_p \text{sign}(j_0 \dots j_m) [\dots] = 0.$$

Nun ist aber

$$\sum_p \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \cdot \gamma(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{t_0}) = 0$$

für $k = 0, \dots, n-1$, weil eine Vertauschung von j_k mit j_{k+1}
 nur $\text{sign}(j_0, \dots, j_m)$ umkehrt, $(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{t_0})$
 jedoch unverändert läßt. Daraus folgt mit (12.5.3):

$$\begin{aligned} & \sum_p \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \cdot \gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_0}) = \\ & = \sum_p \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \gamma(i_0, \dots, i_n) = \alpha, \end{aligned}$$

womit (12.5.1) bewiesen ist.

Beweis von (12.5.2).

(12.5.4) ergibt für das Simplex $(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_0}, i_{t_1})$,

$t_0 > n$, $t_1 > n$, $t_0 \neq t_1$:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \gamma(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{n-2}, i_{n-1}, i_{t_0}, i_{t_1}) + \right. \\ & + (-1)^{n-1} \gamma(i_0, \dots, i_{n-2}, i_{t_0}, i_{t_1}) + \\ & \left. + (-1)^n \gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_1}) + (-1)^{n+1} \gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_0}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Wir schließen weiter wie im vorangehenden Beweis:

$$\sum_p \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \left[\dots \right] = 0$$

$$\sum_p \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \gamma(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{n-2}, i_{n-1}, i_{t_0}, i_{t_1}) = 0$$

für $k = 0, \dots, n-2$.

$$\left. \begin{aligned} \sum_p \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_1}) &= \alpha \\ \sum_p \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \gamma(i_0, \dots, i_{n-1}, i_{t_0}) &= \alpha \end{aligned} \right\} \text{ nach (12.5.1)}$$

Also ist $\sum_p \text{sign}(j_0, \dots, j_m) \gamma(i_0, \dots, i_{n-2}, i_{t_0}, i_{t_1}) = 0$,
womit (12.5.2) für $k = 0, \dots, n-1$ bewiesen ist.

Wir fassen zusammen:

Die Realisierung des Prismas über z_d^{1+2} durch Verbindungssimplexe zwischen Simplexen aus $K_{1+2}(I', \mathcal{G})$ und $K'_{1+2}(I', \mathcal{G})$ ist eine in G_1 liegende $(d+1)$ -Kette mit dem Rand $z_d^{1+2} - z_d^{i+2}$. z_d^{i+2} und z_d^{1+1} sind in G_1 homolog.

Damit ist gezeigt, daß $C_d = \{z_d^{1+1}(G_1)\}$ ein schwebender d -Zyklus ist.

12.6

Die $z_d^{i+1}(G_1)$ sind Repräsentanten der Klasse $j_d(I', \mathcal{G})$. Ist $j_d(I', \mathcal{G}) \neq 0$, so berandet kein $z_d^{i+1}(G_1)$ in $\mathcal{M}$, erst recht nicht in G_1 . Nach der Definition der Berandung für schwebende Zyklen berandet also C_d nicht in $K(I', \mathcal{G})$.

Die mit Hilfe schwebender Zyklen gewonnenen Homologiegruppen sind nach Kaplan [5] S. 260 r zu den gewöhnlichen Čechschen Homologiegruppen von $K(I', \mathcal{G})$ isomorph (Koeffizientenbereich beliebiger Körper). Also gilt folgender Satz:

SATZ 2: f und g seien stetige Abbildungen der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$. Ist die der Abbildungsklasse (f, g) zugeordnete Invariante $j_d(f, g) \neq 0$, so ist auch die d -dimensionale Čechsche Homologiegruppe des Koinzidenzgebildes $K(f, g)$ nicht null.

Nach Hurewicz - Wallman [7] S. 137 sind die r -dimensionalen Čechschen Homologiegruppen eines Kompaktums X für $r > \dim X$ null. Mit Satz 2 folgt daraus

SATZ 4: f und g seien stetige Abbildungen der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$, ($\dim \mathcal{M} = m$, $\dim \mathcal{N} = n$, $m-n=d$). Ist die Invariante $j_d(f, g) \neq 0$, so ist die Dimension des Koinzidenzgebildes $K(f, g)$ mindestens d .

Oder, wenn man die Invarianz von $j_d(f, g)$ in der Aussage mit zum Ausdruck bringt:

Ist die einer Klasse (f, g) von Abbildungspaaren zugeordnete Invariante $j_d(f, g) \neq 0$, so ist die Dimension des Koinzidenzgebildes $K(f_1, g_1)$ für alle Abbildungspaare $[f_1, g_1]$ aus dieser Klasse mindestens d .

12.7

In [1] S. 91 ist bewiesen: Bei einer abgeschlossenen Abbildung eines Raumes M in einen Raum N ($\dim M = m$, $\dim N = n$, $m-n=d \geq 0$) existiert mindestens ein Punkt in N , dessen Urbild mindestens d -dimensional ist.

(Eine abgeschlossene Abbildung führt abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen über. Jede stetige Abbildung eines Kompaktums ist abgeschlossen.)

Satz 4 für den Fall $g = \text{const.}$ liefert eine analoge Aussage. Nach Beispiel 8.1* ist $j_d(f, \text{const.}) \neq 0$ gleichbedeutend damit, daß f in der Dimension n einen nichtverschwindenden Homologienomorphismus induziert. Wir erhalten

SATZ 5: Bei einer stetigen Abbildung einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ ($\dim \mathcal{M} = m$, $\dim \mathcal{N} = n$, $m-n=d \geq 0$), die in der Dimension n einen nichtverschwindenden Homologienomorphismus induziert, hat jeder Punkt von $\mathcal{N}$ ein mindestens d -dimensionales Urbild.

Solche Abbildungen sind insbesondere stets wesentlich. Für $m = n$ wird der Homologienomorphismus durch den Abbildungsgrad von f beschrieben und unsere Aussage lautet: Ist der Abbildungsgrad $c_f \neq 0$, so ist f wesentlich. (Zuerst bewiesen von Hopf: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Journal für Mathematik Bd. 163 S. 71.)

Nach Beispiel 8.2* ist $j_d(f, 1) \neq 0$ gleichbedeutend damit, daß f in der Dimension n einen nichtverschwindenden Homologienomorphismus induziert und zugleich die Eulersche Charakteristik von $\mathcal{N}$ nicht null ist. Wählt man also g homolog zu f , so erhält man aus Satz 4 die folgende Verallgemeinerung des Satzes, daß jede Deformation eines Polyeders mit nichtverschwindender Eulerscher Charakteristik mindestens einen Fixpunkt besitzt:

SATZ 6: Zwei homologe Abbildungen einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ mit nichtverschwindender Eulerscher Charakteristik, die in der Dimension n einen nichtverschwindenden Homologienomorphismus induzieren, stimmen auf einer mindestens d -dimensionalen abgeschlossenen Teilmenge von $\mathcal{M}$ überein.

LITERATURVERZEICHNIS

=====

- [1] Alexandroff - Hopf: Topologie I, Springer 1935
- [2] Alexandroff, P.: Combinatorial Topology, Grayloc Press, Rochester, N.Y. I 1956, II 1957, III 1960
- [3] Alexandroff, P.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954
- [4] Franz, W.: Über die Graphen der Abbildungen einer Mannigfaltigkeit in eine andere, Archiv der Mathematik, 1959, 24 - 39.
- [5] Franz, W.: Topologie I, Sammlung Götschen Bd. 1181
- [6] Hopf, H.: Die Coinzidenz-Cozyklen und eine Formel aus der Fasertheorie, Algebraic Geometry and Topology, Princeton University Press, 1957
- [7] Hurewicz - Wallmann: Dimension Theory, Princeton University Press, 1941
- [8] Kaplan, S.: Homology Properties of Arbitrary Subsets of Euclidean Spaces, Trans.Amer.Mathem. Soc. 62 (1947), 248 - 271
- [9] Mayer, W.: On Products in Topology, Annals of Math. 46, (1945), 29 - 57
- [10] Schirmer, H.: Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten Journ. reine angew. Math. 194 (1955), 21 - 39
- [11] Steenrod, N.: The Topology of Fibre Bundles Princeton University Press, 1951
- [12] Whitney, H.: On Products in a Complex, Annals of Math. 39 (1938), 397 - 422

Lebenslauf

Hartmut Schlagbauer, geboren am 4.5.1932 in Kemoten/Allgäu als Sohn des Bundesbahnbeamten Karl Schlagbauer und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Starke.

Volksschule 1938 zunächst in Kempten/Allgäu, ab Herbst 1938 in Solbad Hall/Tirol bis 1942.

Oberschule 1942 - 44 in Solbad Hall, 1945 - 51 in Kempten/Allgäu. Reifeprüfung im Juni 1951.

Studium der Mathematik und Physik an der Universität München 1951 - 53, ab WS 1953/54 an der Universität Frankfurt/Main, dort 1957 Prüfung für das höhere Lehramt in Mathematik und Physik. Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Seminar 1956 - 58.

Ab 1.3.1958 Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Braunschweig, 1.3.1959 wissenschaftlicher Assistent, ab 1.3.1960 mit der Wahrnehmung der Dienstgeschäfte eines Oberingenieurs beauftragt.

Meine Lehrer in Mathematik waren in München die Professoren König, R. Schmidt und Seebach, in Frankfurt die Professoren Baer, Behrens, Burger, Franz und Moufang.

Ihnen allen fühle ich mich zu Dank verpflichtet.
Herrn Prof. Franz, der die vorliegende Arbeit anregte, danke ich für die unermüdliche Förderung und Anteilnahme.

